গণিত

নবম শ্রেণি

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, বাংলাদেশ

নারী ও কন্যাশিশুদের শিক্ষা প্রসারের স্বীকৃতি হিসেবে ২০১৪ সালে
ইউনেস্কো 'শান্তিবৃক্ষ' (Peace Tree) পুরস্কার গ্রহণ।

নারী ও কন্যাশিশুদের শিক্ষা প্রসারে বিশেষ অবদান রাখার জন্য ২০১৪ সালে ইউনেস্কো বাংলাদেশের প্রধানমন্ত্রী শেখ হাসিনাকে 'শান্তিবৃক্ষ' (Peace Tree) পুরস্কারে ভূষিত করে। মাননীয় প্রধানমন্ত্রীর হাতে 'শান্তিবৃক্ষ' (Peace Tree) পুরস্কার তুলে দেওয়ার সময় শেখ হাসিনাকে 'সাহসী নারী' হিসেবে অভিহিত করেন ইউনেস্কোর মহাপরিচালক। তিনি বলেন, নারী ও কন্যাশিশুদের ক্ষমতায়নে বাংলাদেশের প্রধানমন্ত্রী বিশ্বমঞ্চের জোরালো এক কণ্ঠ।

কন্যাশিশু ও নারী শিক্ষা প্রসারের ফলে নারীরা সামাজিক, মানসিক ও অর্থনৈতিকভাবে স্বাবলম্বী হচ্ছে, টেকসই উন্নয়নের ভিত্তি রচিত হয়েছে এবং নারীরা নতুন নতুন পেশায় যুক্ত হওয়ার সুযোগ পাচ্ছে।

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড কর্তৃক জাতীয় শিক্ষাক্রম ২০২২ অনুযায়ী প্রণীত
এবং ২০২৪ শিক্ষাবর্ষ থেকে নবম শ্রেণির জন্য নির্ধারিত পাঠ্যপুস্তক

গণিত

নবম শ্রেণি

(পরীক্ষামূলক সংস্করণ)

রচনা ও সম্পাদনা

ড. মোঃ রাশেদ তালুকদার

ড. মোঃ আব্দুল হাকিম খান

ড. মোঃ আব্দুল হালিম

ড. চন্দ্রনাথ পোদ্দার

নওরীন ইয়াসমিন

মোঃ আহসানুল আরেফিন চৌধুরী

রতন কান্তি মণ্ডল

মোঃ মুনজিল হোসেন

আসিফ বায়েজিদ

মোঃ কমরউদ্দিন আকন

মো. মোখলেস উর রহমান

মোছা. নুরুন্নেসা সুলতানা

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, বাংলাদেশ

৬৯-৭০, মতিঝিল বাণিজ্যিক এলাকা, ঢাকা-১০০০
কর্তৃক প্রকাশিত

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, বাংলাদেশ

প্রকাশকাল: ডিসেম্বর ২০২৩

শিল্প নির্দেশনা
মঞ্জুর আহমদ

চিত্রণ
কামরুন নাহার মিমি
মাহমুদুল হাসান সিয়াম

প্রচ্ছদ
মাহমুদুল হাসান সিয়াম

গ্রাফিক্স
নূর-ই-ইলাহী
কে. এম. ইউসুফ আলী

গণপ্রজাতন্ত্রী বাংলাদেশ সরকার কর্তৃক বিনামূল্যে বিতরণের জন্য

মুদ্রণে :

প্রসঙ্গ কথা

পরিবর্তনশীল এই বিশ্বে প্রতিনিয়ত বদলে যাচ্ছে জীবন ও জীবিকা। প্রযুক্তির উৎকর্ষের কারণে পরিবর্তনের গতিও হয়েছে অনেক দ্রুত। দ্রুত পরিবর্তনশীল এই বিশ্বের সঙ্গে আমাদের খাপ খাইয়ে নেওয়ার কোনো বিকল্প নেই। কারণ প্রযুক্তির উন্নয়ন ইতিহাসের যেকোনো সময়ের চেয়ে এগিয়ে চলেছে অভাবনীয় গতিতে। চতুর্থ শিল্পবিপ্লব পর্যায়ে কৃত্রিম বুদ্ধিমত্তার বিকাশ আমাদের কর্মসংস্থান এবং জীবনযাপন প্রণালিতে যে পরিবর্তন নিয়ে আসছে তার মধ্য দিয়ে মানুষে মানুষে সম্পর্ক আরও নিবিড় হবে। অদূর ভবিষ্যতে অনেক নতুন কাজের সুযোগ তৈরি হবে যা এখনও আমরা জানি না। অনাগত সেই ভবিষ্যতের সাথে আমরা যেন নিজেদের খাপ খাওয়াতে পারি তার জন্য এখনই প্রস্তুতি গ্রহণ করা প্রয়োজন।

পৃথিবী জুড়ে অর্থনৈতিক প্রবৃদ্ধি ঘটলেও জলবায়ু পরিবর্তন, বায়ুদূষণ, অভিবাসন এবং জাতিগত সহিংসতার মতো সমস্যা আজ অনেক বেশি প্রকট। দেখা দিচ্ছে কোভিড ১৯-এর মতো মহামারি যা সারা বিশ্বের স্বাভাবিক জীবনযাত্রা এবং অর্থনীতিকে থমকে দিয়েছে। আমাদের প্রাত্যহিক জীবনযাত্রায় সংযোজিত হয়েছে ভিন্ন ভিন্ন চ্যালেঞ্জ এবং সম্ভাবনা।

এসব চ্যালেঞ্জ ও সম্ভাবনার দ্বারপ্রান্তে দাঁড়িয়ে তার টেকসই ও কার্যকর সমাধান এবং আমাদের জনমিতিক সুফলকে সম্পদে রূপান্তর করতে হবে। আর এজন্য প্রয়োজন জ্ঞান, দক্ষতা, মূল্যবোধ ও ইতিবাচক দৃষ্টিভঙ্গিসম্পন্ন দূরদর্শী, সংবেদনশীল, অভিযোজন-সক্ষম, মানবিক, বৈশ্বিক এবং দেশপ্রেমিক নাগরিক। এই প্রেক্ষাপটে বাংলাদেশ স্বল্পোন্নত দেশ থেকে উন্নয়নশীল দেশে উত্তরণ এবং ২০৪১ সালের মধ্যে উন্নত দেশে পদার্পণের লক্ষ্যমাত্রা অর্জনের প্রচেষ্টা অব্যাহত রেখেছে। শিক্ষা হচ্ছে এই লক্ষ্য অর্জনের একটি শক্তিশালী মাধ্যম। এজন্য শিক্ষার আধুনিকায়ন ছাড়া উপায় নেই। আর এই আধুনিকায়নের উদ্দেশ্যে একটি কার্যকর যুগোপযোগী শিক্ষাক্রম প্রণয়নের প্রয়োজনীয়তা দেখা দিয়েছে।

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ডের একটি নিয়মিত কিন্তু খুবই গুরুত্বপূর্ণ কার্যক্রম হলো শিক্ষাক্রম উন্নয়ন ও পরিমার্জন। সর্বশেষ শিক্ষাক্রম পরিমার্জন করা হয় ২০১২ সালে। ইতোমধ্যে অনেক সময় পার হয়ে গিয়েছে। প্রয়োজনীয়তা দেখা দিয়েছে শিক্ষাক্রম পরিমার্জন ও উন্নয়নের। এই উদ্দেশ্যে শিক্ষার বর্তমান পরিস্থিতি বিশ্লেষণ এবং শিখন চাহিদা নিরূপণের জন্য ২০১৭ থেকে ২০১৯ সালব্যাপী এনসিটিবির আওতায় বিভিন্ন গবেষণা ও কারিগরি অনুশীলন পরিচালিত হয়। এসব গবেষণা ও কারিগরি অনুশীলনের ফলাফলের উপর ভিত্তি করে নতুন বিশ্ব পরিস্থিতিতে টিকে থাকার মতো যোগ্য প্রজন্ম গড়ে তুলতে প্রাক-প্রাথমিক থেকে দ্বাদশ শ্রেণির অবিচ্ছিন্ন যোগ্যতাভিত্তিক শিক্ষাক্রম উন্নয়ন করা হয়েছে।

যোগ্যতাভিত্তিক এ শিক্ষাক্রমের আলোকে সকল ধারার (সাধারণ, মাদ্রাসা ও কারিগরি) নবম শ্রেণির শিক্ষার্থীদের জন্য এই পাঠ্যপুস্তক প্রণয়ন করা হলো। বাস্তব অভিজ্ঞতার আলোকে পাঠ্যপুস্তকের বিষয়বস্তু এমনভাবে রচনা করা হয়েছে যেন তা অনেক বেশি সহজবোধ্য এবং আনন্দময় হয়। এর মাধ্যমে চারপাশে প্রতিনিয়ত ঘটে চলা বিভিন্ন প্রপঞ্চ ও ঘটনার সাথে পাঠ্যপুস্তকের একটি মেলবন্ধন তৈরি হবে। আশা করা যায় এর মাধ্যমে শিখন হবে অনেক গভীর এবং জীবনব্যাপী।

পাঠ্যপুস্তকটি প্রণয়নে সুবিধাবঞ্চিত ও বিশেষ চাহিদাসম্পন্ন শিক্ষার্থীর বিষয়টি বিশেষভাবে বিবেচনায় নেওয়া হয়েছে। এছাড়াও পাঠ্যপুস্তকটি প্রণয়নের ক্ষেত্রে ধর্ম, বর্ণ নির্বিশেষে সকলকে যথাযথ গুরুত্ব দেওয়া হয়েছে। বানানের ক্ষেত্রে বাংলা একাডেমির বানানরীতি অনুসরণ করা হয়েছে। পাঠ্যপুস্তকটি রচনা, সম্পাদনা, পরিমার্জন, চিত্রাঙ্কন ও প্রকাশনার কাজে যাঁরা মেধা ও শ্রম দিয়েছেন তাঁদের সবাইকে ধন্যবাদ জ্ঞাপন করছি।

পরীক্ষামূলক এই সংস্করণে কোনো ভুল বা অসংগতি কারো চোখে পড়লে এবং এর মান উন্নয়নের লক্ষ্যে কোনো পরামর্শ থাকলে তা জানানোর জন্য সকলের প্রতি বিনীত অনুরোধ রইল।

প্রফেসর মোঃ ফরহাদুল ইসলাম

চেয়ারম্যান

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, বাংলাদেশ

প্রিয় শিক্ষার্থী

মাধ্যমিক স্তরের নবম শ্রেণির শিক্ষার্থী হিসাবে তোমাদেরকে স্বাগতম জানাচ্ছি। 'জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, বাংলাদেশ' মাধ্যমিক স্তরের সকল শিক্ষার্থীর জন্য নতুন বই তৈরি করার পরিকল্পনা গ্রহণ করেছে। এরই ধারাবাহিকতায় নবম শ্রেণির নতুন গণিত বইটি রচনা করা হয়েছে। বইটির উপস্থাপন, অলংকরণ, আলোচ্য বিষয় এবং গণিত শিক্ষণ ও শিখন পদ্ধতিতে মৌলিক কিছু পরিবর্তন করা হয়েছে। নিশ্চয়ই নবম শ্রেণির বইয়ের এই পরিবর্তন এবং নতুনত্ব নিয়ে তোমাদের নানা রকম কৌতূহল রয়েছে।

অভিজ্ঞতাভিত্তিক শিখন পদ্ধতিতে বাস্তব জীবন এবং অভিজ্ঞতার সাথে পাঠের বিষয়গুলোর যোগসূত্র তৈরি করা খুব জরুরি। এই প্রেক্ষাপটে নবম শ্রেণির শিক্ষার্থীদের উপযোগী করে বইটি প্রস্তুত করার সময় দুইটি দিক সর্বোচ্চ গুরুত্ব পেয়েছে। প্রথমত, তোমরা চারপাশের পরিচিত পরিবেশের বস্তু ও ঘটনা পর্যবেক্ষণ করে হাতে কলমে কাজের মাধ্যমে গাণিতিক সমস্যা সমাধান করার সুযোগ পাবে। দ্বিতীয়ত, দৈনন্দিন জীবনের বিভিন্ন কাজে গাণিতিক দক্ষতা ব্যবহার করার কৌশলগুলো আয়ত্ত করতে পারবে।

নবম শ্রেণির এই বইটিতে মোট নয়টি শিখন অভিজ্ঞতা পরিকল্পনা করা হয়েছে। বাস্তব জীবনের সাথে সম্পর্কিত বিভিন্ন সমস্যাকে গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ করে সমাধান খোঁজার মধ্য দিয়ে এই অভিজ্ঞতাগুলোতে তোমরা অংশগ্রহণ করবে। প্রতিটি শিখন অভিজ্ঞতা এমনভাবে বিভিন্ন ধাপে উপস্থাপন করা হয়েছে, যেনো তোমরা সক্রিয় অংশগ্রহণ ও বাস্তব উপকরণ ব্যবহারের মাধ্যমে গাণিতিক ধারণা ও দক্ষতাগুলো আয়ত্ত করতে পার। গাণিতিক অনুসন্ধানের মাধ্যমে গণিত শিখনের এই যাত্রা তোমাদের জন্য যেমন আনন্দদায়ক হবে তেমনি বাস্তব জীবনের সঙ্গে গণিতের ধারণাগুলোর সম্পর্ক তোমরা নিজেরাই খুঁজে পাবে।

শ্রেণিকক্ষের ভিতরে এবং বাইরে সকল কাজে শিক্ষক তোমাদের সার্বিক সহায়তা প্রদান করবেন। আমরা আরো আশা করছি যে, তোমরা এই শিখন কার্যক্রমের বিভিন্ন কাজে অংশগ্রহণের সময় একে অপরের প্রতি সহায়ক ভূমিকা পালন করবে এবং সহপাঠীদের সাথে নিয়ে গণিতের বিভিন্ন বিষয়কে খুঁজে দেখবে। তোমরা সবসময় মনে রাখবে যে, তোমাদের সকলের মধ্যে যখন সহযোগিতাপূর্ণ মনোভাব থাকবে তখন যেকোনো কাজ তোমরা সফলতার সাথে সম্পন্ন করতে পারবে। আমরা আশা করছি গণিতের জগতে তোমাদের জন্য একটি কার্যকরী ও আনন্দময় শিখন অভিযাত্রা নিশ্চিত করতে এই পাঠ্যপুস্তকটি তোমাদের জন্য সহায়ক উপকরণ হিসেবে কাজ করবে।

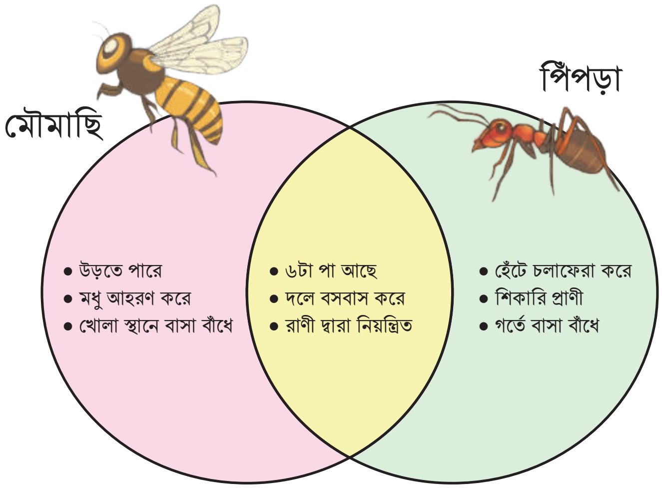
তোমাদের সকলের জন্য শুভকামনা।

সূচিপত্র

প্রাত্যহিক জীবনে সেট

এই অভিজ্ঞতায় শিখতে পারবে-

- সেটের ধারণা
- সেটের প্রকারভেদ
- সেটের অপারেশন
- ভেন চিত্র
- কার্তেসীয় গুণজ
- সেটের প্রয়োগ



প্রাত্যহিক জীবনে সেট

প্রতিটি শ্রেণিতে উত্তীর্ণ হবার সময় তোমাদের এক সেট বই দেওয়া হয়। অষ্টম শ্রেণিতে যখন উত্তীর্ণ হয়েছিলে তোমাকে যে বইয়ের সেট দেওয়া হয়েছিল তাতে কী কী বিষয়ের বই ছিল, নিচের ফাঁকা ঘরে লেখো :

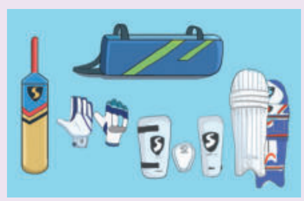
অষ্টম শ্রেণির বইয়ের সেট :

একটু মনে করে দেখো শেষ যখন রং পেনসিল ব্যবহার করেছিলে, তোমার রং পেনসিলের সেটে কী কী রং ছিল?

রং পেনসিলের রঙের সেট :

তোমরা অনেকেই নিশ্চয়ই ক্রিকেট খেলতে বা দেখতে পছন্দ করো। নিচে একটি ক্রিকেট খেলার সরঞ্জামের সেট এর ছবি দেওয়া আছে। সেটটিতে কী কী রয়েছে সেগুলো দেখে পাশের ফাঁকা ঘরে লেখো :

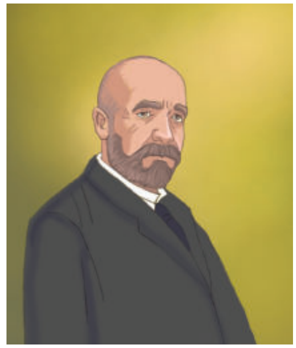
ক্রিকেট খেলার সরঞ্জামের সেট :



তোমরা এতক্ষণে বুঝে গিয়েছ আমরা বিভিন্ন জিনিসের সেট নিয়ে আলোচনা করছি। তোমরা দেখলে পাঠ্যবই, রং পেনসিল, ক্রিকেট খেলার সরঞ্জাম ইত্যাদির সব কিছুরই সেট হয়। তোমাদের শ্রেণিতে যতজন শিক্ষার্থী রয়েছে তাদের নিয়ে একটি সেট হতে পারে। বাংলাদেশের জাতীয় পতাকার রঙের একটি সেট হতে পারে। তোমার পড়ার টেবিলে যা যা রয়েছে সেগুলো নিয়েও একটি সেট হতে পারে। এ-তো গেল বাস্তব বস্তু। বিমূর্ত বস্তুর ও সেট হয়। যেমন, তোমাদের বিদ্যালয়ের ফুটবল দলের খেলোয়াড়দের নামের সেট। আবার বিভিন্ন সংখ্যার সেটও হতে পারে। যেমন, পূর্ণ সংখ্যার সেট।

জেনে রাখো

সেট তত্ত্বের জনক হলেন জার্মান গণিতবিদ জর্জ ক্যান্টর (Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor), তার জন্ম জার্মানিতে। ক্যান্টর এবং তাঁর আজীবনের বন্ধু রিচার্ড ডেডেকিন্ড (Richard Dedekind) চিঠি আদান-প্রদান করে একমত হন যে সেট হলো সসীম বা অসীম বস্তুর (object) একটি সংগ্রহ যা একটি নির্দিষ্ট বৈশিষ্ট্য ধারণ করে এবং প্রতিটি বস্তুর স্বতন্ত্রতা বজায় থাকে।



জর্জ ক্যান্টর

তাহলে আমরা বলতে পারি,

বাস্তব বা বিমূর্ত বিভিন্ন বস্তুর সুনির্দিষ্ট সংগ্রহকে সেট (set) বলে।

১.১ গণিতে সেটের প্রয়োজনীয়তা

তোমরা এতক্ষণে নিশ্চয়ই ভাবতে শুরু করেছ যে গণিতে সেটের কী প্রয়োজন? নিচের উদাহরণটি মনোযোগ সহকারে লক্ষ করলে তোমাদের কাছে সেটের প্রয়োজনীয়তা স্পষ্ট হয়ে যাবে।

উদাহরণ ১

মিতুদের বিদ্যালয়ের ষোল জন শিক্ষার্থী একটি স্থানীয় গণিত অলিম্পিয়াডে অংশগ্রহণ করেছিল, যেখানে শিক্ষার্থীদের বুদ্ধিমত্তা যাচাইয়ের জন্য বিভিন্ন কুইজ দেয়া হয়েছিল যার পূর্ণমান ছিল ১০০। প্রাপ্ত ফলাফলের ভিত্তিতে সিদ্ধান্ত নেওয়া হবে যে তাদের মাঝে কে কে জাতীয় গণিত অলিম্পিয়াডে যাবে। যে সকল শিক্ষার্থীর প্রাপ্ত নম্বর ৬০%-এর বেশি তারা জাতীয় পর্যায়ে বিদ্যালয়ের প্রতিনিধিত্ব করবে।

নাম	প্রাপ্ত নম্বর	নাম	প্রাপ্ত নম্বর	নাম	প্রাপ্ত নম্বর	নাম	প্রাপ্ত নম্বর
সাগর	58	দীপ্তি	45	কলি	77	মারুফ	50
কামাল	72	অভিজিৎ	63	ত্রিবিজয়	74	এন্ড্রু	76
মিতু	79	জেবা	90	চৈতি	81	আকাশ	59
সেলিম	33	রওশন	35	নাহার	78	তাসনিম	80

এখন, উক্ত অলিম্পিয়াডে প্রাপ্ত নম্বরসমূহের মধ্যে 60%-এর অধিক নম্বরসমূহকে A এবং 60%- বা এর কম নম্বরসমূহকে B দ্বারা প্রকাশ করা হলে দেখা যায়,

$A = \{72, 79, 63, 90, 77, 74, 81, 78, 76, 80\}$

এবং

$B = \{58, 33, 45, 35, 50, 59\}$

এ থেকে আমরা কী বুঝতে পারলাম? দেখো আমরা নিচের বিষয়গুলো স্পষ্টই বুঝতে পারছি।

- 60%-এর অধিক নম্বরপ্রাপ্ত শিক্ষার্থীদের সংখ্যা অর্ধেকেরও বেশি।
- অংশগ্রহণকারী শিক্ষার্থীদের মধ্যে প্রায় এক তৃতীয়াংশ শিক্ষার্থী 60%-এর কম নম্বর পেয়েছে।
- 60%-এর নিচে প্রাপ্ত নম্বরসমূহ 33 থেকে 59 এর মধ্যে অবস্থিত।

এ ছাড়াও আর কী কী বুঝতে পারলে তা নিচের ফাঁকা ঘরে লেখো :

লক্ষ করো, উপরের উদাহরণটিতে আমরা কিছু গাণিতিক উপাত্ত একটি শর্তের উপর ভিত্তি করে ভিন্ন দুইটি সেট তৈরি করলাম। এখন বলো তো গণিত অলিম্পিয়াডে অংশগ্রহণকারী শিক্ষার্থীদের দক্ষতাকে আরও বৃদ্ধি করতে হলে কী কী সিদ্ধান্ত নেয়া প্রয়োজন? যেমন আমরা নিচের সিদ্ধান্তটি নিতে পারি।

যে সকল শিক্ষার্থীর প্রাপ্ত নম্বর B সেটে রয়েছে তাদের গণিতের বোধগম্যতা বৃদ্ধির জন্য বিদ্যালয় এবং গণিত শিক্ষকের জরুরি ব্যবস্থা গ্রহণ প্রয়োজন।

এরকম একটি সিদ্ধান্ত নিতে পারলাম কারণ আমরা শিক্ষার্থীদের দুইটি সেটে বিভক্ত করতে পেরেছি। এই উদাহরণের মাধ্যমে তোমরা কি সেটের প্রয়োজনীয়তা বুঝতে পারলে?

সেটের মাধ্যমে আমরা একই জাতীয় গাণিতিক বা বিমূর্ত তথ্যের সংগ্রহ বা সংকলন চিহ্নিত করতে পারি। একই জাতীয় তথ্য বা উপাত্ত আলাদা করার মাধ্যমে উপাত্ত প্রক্রিয়াকরণ এবং প্রাসঙ্গিক বিষয় সম্পর্কে স্বচ্ছ ধারণা অর্জন করা সম্ভব। তাহলে এসো, এরকম একটি প্রয়োজনীয় বিষয় সম্বন্ধে আমরা আরও জানার চেষ্টা করি।

১.২ সেট এর প্রকাশ

সংজ্ঞা এবং প্রয়োজনীয়তা তো জানলে। সেটকে প্রকাশ করারও কিন্তু চমৎকার পদ্ধতি রয়েছে। যে বস্তু বা বস্তুসমূহের সেট প্রকাশ করবে, সেগুলোকে দ্বিতীয় বন্ধনী (Second Bracket) এর মধ্যে কমা (comma) দ্বারা পৃথক করে প্রকাশ করা হয়। যেমন,

বাংলাদেশের জাতীয় পতাকায় রং-এর সেট = {সবুজ, লাল}

জোড়ায় কাজ

সেট এ প্রকাশ করো :

১. অষ্টম শ্রেণির বিষয়সমূহের বইয়ের সেট =

২. তোমার রং পেনসিলের রঙের সেট =

৩. ছবিতে দেওয়া ক্রিকেট খেলার সরঞ্জামের সেট =

১.৩ সেট লেখার পদ্ধতি

- সেটকে সাধারণত ইংরেজি বর্ণমালার বড়ো হাতের অক্ষর $A, B, C, \ldots$, X, Y, Z দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
- কোনো একটি সেটে সংগৃহীত প্রত্যেক বস্তুকে সেটের সদস্য বা উপাদান (element) বলা হয়। উপাদানকে সাধারণত ইংরেজি বর্ণমালার ছোটো হাতের অক্ষর $a, b, c, \ldots, x, y, z$ ইত্যাদি দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
- $B = \{a, b\}$ হলে, B সেটের উপাদান a এবং b. উপাদান প্রকাশের চিহ্ন $\in$। অর্থাৎ $a \in B$ এর অর্থ হলো a, B সেটের একটি উপাদান (a is an element of B অথবা a belongs to B)।
- যদি c, সেট B এর উপাদান না হয় তাহলে আমরা লিখি $c \notin B$ অর্থাৎ c, B-এর উপাদান নয় (c is not an element of B অথবা c does not belong to B) ।

একক কাজ

১. 210 এর মৌলিক উৎপাদকসমূহের সেট তৈরি করে নিচের খালি ঘরে লেখো।

একক কাজ

২. $X = \{5, 7, 9, 11, 13\}$ হলে নিচের ফাঁকা ঘরে $\in$ অথবা $\notin$ বসাও।

9 $\square$ X		10 $\square$ X
3 $\square$ X		13 $\square$ X

১.৪ সেট প্রকাশের পদ্ধতি

তোমরা দেখলে সেটের মাধ্যমে আমরা বস্তু বা সংখ্যার সংকলনকে সুনির্দিষ্টভাবে প্রকাশ করতে পারি। অর্থাৎ কোনো একটি বস্তু সেটের উপাদান কিনা তা সুনির্দিষ্টভাবে বলা যায়। যেমন–

- 10 এর চেয়ে ছোটো সকল বিজোড় সংখ্যার সেট, $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$। এখানে সুনির্দিষ্টভাবে বলা যাবে যে, A এর উপাদান কোনটি। যেমন, $3 \in A$ কিন্তু $4 \notin A$ ।
- ইংরেজি বর্ণমালার স্বরবর্ণ (vowels) এর সেট, $B = \{a, e, i, o, u\}$. এখানে $i \in B$ কিন্তু $b \notin$ B.

সেটকে দুই পদ্ধতিতে প্রকাশ করা হয়। তালিকা পদ্ধতি ও সেট গঠন পদ্ধতি।

১.৪.১ তালিকা পদ্ধতি (Roaster Method বা Tabular Method)

এ পদ্ধতিতে সেটের সকল উপাদানকে কমা দিয়ে পৃথক করে দ্বিতীয় বন্ধনীর মধ্যে লেখা হয়। যেমন,

- 1, 2, 3 দ্বারা গঠিত সেট : $A = \{1, 2, 3\}$
- মৌলিক সংখ্যার সেট : $P = \{2, 3, 5, 7, 11, \cdots\}$
- জোড় সংখ্যার সেট : $E = \{\cdots, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, \cdots\}$

১.৪.২ সেট গঠন পদ্ধতি (Set Builder Method)

এ পদ্ধতিতে সেটের সকল উপাদানকে সুনির্দিষ্টভাবে তাদের বৈশিষ্ট্য বা শর্তের মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়। যেমন,

$$A = \{x : x \text{ স্বাভাবিক বিজোড় সংখ্যা}\}$$

লক্ষ করো, x এর পরে একটি ‘:’ (কোলন) রয়েছে। ‘:’টির দ্বারা ‘এরূপ যেন’ বা সংক্ষেপে ‘যেন’ (such that) বোঝায়। যেহেতু এ পদ্ধতিতে সেটের উপাদান নির্ধারণের জন্য শর্ত বা নিয়ম (rule) দেওয়া থাকে, এ জন্য এ পদ্ধতিকে Rule Method ও বলা হয়।

উদাহরণ ১. সেট $A = \{0, 3, 6, 9, 12, 15\}$ কে গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ করো।

সমাধান : এখানে সেটের প্রত্যেকটি উপাদান পূর্ণসংখ্যা, 0 এর চেয়ে ছোটো নয়, 15 এর চেয়ে বড়ো নয় এবং 3 এর গুণিতক। সুতরাং সেট গঠন পদ্ধতিতে আমরা লিখতে পারি,

$$A = \{x : x \text{ পূর্ণসংখ্যা, } 3 \text{ এর গুণিতক, } 0 \leq x \leq 15\}$$

উদাহরণ ২ : সেট $A = \{x : x \text{ পূর্ণসংখ্যা, } x^2 \leq 25\}$ কে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ করো।

সমাধান : এখানে সেটের প্রত্যেকটি উপাদান পূর্ণসংখ্যা যাদের বর্গ 25 এর চেয়ে ছোটো বা সমান। এই ধরনের সংখ্যাগুলো $0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5$. সুতরাং তালিকা পদ্ধতিতে আমরা লিখতে পারি,

$$A = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5\} = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

একক কাজ

১. নিচের সেটগুলোকে সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ করো।

ক) $A = \{-28, -21, -14, -7, 7, 14, 21, 28\}$

খ) $B = \{0, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots\}$

২. নিচের সেট গঠন পদ্ধতিতে লেখা সেটগুলোকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ করো।

ক) $D = \{x : x, 5 \text{ এর গুণিতক এবং } 30 \text{ এর চেয়ে ছোটো}\}$

খ) $F = \{x : x, 30 \text{ এর গুণনীয়ক}\}$

গ) $G = \{x : x, \text{ ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা এবং } x^2 < 17\}$

ঘ) $H = \{x : x^2 + 3x + 2 = 0\}$

কিছু বিশেষ সেট এর উদাহরণ

N : সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সেট (Set of all natural numbers)

Z : সকল পূর্ণসংখ্যার সেট (Set of all integers)

Q : সকল মূলদ সংখ্যার সেট (Set of all rational numbers)

R : সকল বাস্তব সংখ্যার সেট (Set of all real numbers)

Z^+ : সকল ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার সেট (Set of all positive integers)

Q^+ : সকল ধনাত্মক মূলদ সংখ্যার সেট (Set of all positive rational numbers)

R^+ : সকল ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার সেট (Set of all positive real numbers)

১.৫ সেট এর প্রকারভেদ

১.৫.১ সার্বিক সেট (Universal Set)

যদি কোনো সেটের উপাদানগুলো অন্য কোনো একটি নির্দিষ্ট সেট থেকে সংগৃহীত হয়, তবে যে নির্দিষ্ট সেট থেকে উপাদানগুলো সংগৃহীত হয় তাকে **সার্বিক সেট** (universal set) বলে। সার্বিক সেটকে সাধারণত U দ্বারা প্রকাশ করা হয়। তবে অন্য প্রতীকের সাহায্যেও সার্বিক সেট প্রকাশ করা যায়। যেমন : সকল জোড় স্বাভাবিক সংখ্যার সেট $E = \{2, 4, 6,...\}$ এবং সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সেট $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6,...\}$ হলে N হবে E সেটের সার্বিক সেট।

উদাহরণ : $A = \{x, y\}$ সেটটি ইংরেজি ছোটো অক্ষরের বর্ণের সেট থেকে সংগৃহীত। সুতরাং ইংরেজি ছোটো অক্ষরের বর্ণের সেট হলো $A = \{x, y\}$ সেটের সার্বিক সেট।

১.৫.২ সসীম সেট (Finite Set)

যে সেট এর উপাদান সংখ্যা গণনা করে শেষ করা যায়, তাকে **সসীম সেট** বলে। যেমন–

$$A = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$B = \{a, e, i, o, u\}$$

$$F = \{x : x \text{ মৌলিক সংখ্যা এবং } 30 < x < 70\}$$

এখানে সেট A এবং B এর উপাদান সংখ্যা যথাক্রমে 4 এবং 5 ।

মাথা খাটাও

F সেটের উপাদানসংখ্যা কয়টি? কীভাবে নির্ণয় করলে নিচের খালি জায়গায় লেখো?

১.৫.৩ অসীম সেট (Infinite Set)

যে সেট এর উপাদান সংখ্যা গণনা করে শেষ করা যায় না, তাকে **অসীম সেট** বলে। যেমন,

ক) $A = \{x : x \text{ বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যা}\}$

খ) স্বাভাবিক সংখ্যার সেট $N = \{1, 2, 3, 4,...\}$

গ) পূর্ণসংখ্যার সেট $Z = \{...,-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,...\}$

ঘ) মূলদ সংখ্যার সেট $Q = \left\{\frac{a}{b} : a \text{ ও } b \text{ পূর্ণসংখ্যা এবং } b \neq 0\right\}$

ঙ) বাস্তব সংখ্যার সেট R

মাথা খাটাও

উপরের সেটগুলো অসীম কেন?

দলগত কাজ

নিচের ছক ১.১ এর বাম পাশের কলামে কিছু সেটের বিবরণ দেওয়া আছে। তোমাদের কাজ হলো একেকটি সেট সসীম না অসীম তা নির্ধারণ করে ফাঁকা ঘরে টিক (√) দেওয়া। সেই সাথে ডান পাশের ফাঁকা কলামে তোমাদের যুক্তিটি আলোচনা করে লিখবে।

ছক ১.১				
ক্রমিক	সেট	সসীম	অসীম	তোমাদের যুক্তি
১	10 এর চেয়ে ছোটো সকল বিজোড় সংখ্যা			
২	বাংলাদেশের নদীসমূহ			
৩	ইংরেজি বর্ণমালার স্বরবর্ণ (vowels)			
৪	210 এর মৌলিক উৎপাদকসমূহ			
৫	$B = \{x : x,$ 30 এর গুণনীয়ক$\}$			
৬	$D = \{x : x^2 + 3x + 2 = 0\}$			
৭	$P = \{2, 3, 5, 7, 11, \cdots\}$			
৮	$A = \{x \in N : 0 < x < 1\}$			
৯	$B = \{x \in Q : x^2 = -1\}$			

মাথা খাটাও

ছক ১.১ পূরণের সময় 8 এবং 9 নং সেট দুটি নির্ণয় করতে পেরেছ? সেট দুইটিতে কয়টি উপাদান রয়েছে তা নিচের ফাঁকা ঘরে লেখো।

৮ নং সেটের উপাদান সংখ্যা =

৯ নং সেটের উপাদান সংখ্যা =

১.৫.৪ ফাঁকা সেট (Empty Set)

যে সেট এর কোন উপাদান নেই তাকে **ফাঁকা সেট** বলে। একে $\emptyset$ বা $\{\ \}$ চিহ্ন দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। যেমন-

$A = \{x : 0 < x < 1$, যেখানে x স্বাভাবিক সংখ্যা$\}$।

আবার,

$B = \{x : x^2 = -1$,যেখানে x মূলদ সংখ্যা$\}$।

ভেবে দেখো তো, এটা সম্ভব কিনা। তোমার উত্তর নিচের ফাঁকা ঘরে লেখো।

ভেবে দেখো

- একটি বালিকা বিদ্যালয়ে বালকের সংখ্যার সেটটি কিন্তু একটি ফাঁকা সেট!
- মৌলিক বর্গসংখ্যার সেট একটি ফাঁকা সেট
- $\mathrm{A} = \{x : x$ পূর্ণসংখ্যা, $8 < x^3 \leq 25\}$ একটি ফাঁকা সেট

এবার তুমি এবং তোমার একজন সহপাঠি মিলে পাঁচটি ফাঁকা সেট খুঁজে বের করে লেখো।

১.৫.৫ উপসেট (Subset)

কোনো একটি সেট A এর প্রত্যেকটি উপাদান যদি আরেকটি সেট B এর উপাদান হয় তবে সেট A কে সেট B এর **উপসেট** (Subset) বলে এবং লেখা হয় $A \subseteq B$ এবং পড়া হয়, A, B এর উপসেট (A is a subset of B)। এখানে $\subseteq$ উপসেটের চিহ্ন।

ধরি, $A = \{a, b\}$ একটি সেট। এই সেটের উপাদান থেকে $\{a, b\}$, $\{a\}$, $\{b\}$ সেটগুলো গঠন করা যায়। আবার, কোনো উপাদান না নিয়ে ফাঁকা সেট $\emptyset$ গঠন করো যায়। এখানে, গঠিত $\{a, b\}$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\emptyset$ প্রত্যেকটি সেটের প্রত্যেক উপাদান A সেটের উপাদান। সুতরাং এদের প্রত্যেকটি সেটকে A সেটের উপসেট। উপরের উপসেটগুলোর মধ্যে $\{a, b\}$ সেট A এর সমান। প্রত্যেকটি সেট নিজের উপসেট। আবার, যে কোনো সেট থেকে $\emptyset$ সেট গঠন করা যায়। সুতরাং $\emptyset$ যে কোনো সেটের উপসেট।

চিন্তা করো : একটি সার্বিক সেট নিজেই তার উপসেট হতে পারে কিনা?

যাচাই করো

১. মনে করো, $P = \{1, 2, 3\}$, $Q = \{2, 3\}$, এবং $R = \{1, 3\}$

ক) Q এবং R, P এর উপসেট কারণ ______________________________।

খ) Q, P এর একটি উপসেট। এটির প্রকাশ হলো: ______________________________।

গ) $P \subseteq P$, এই প্রকাশটি সত্য নাকি মিথ্যা? তোমার উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দাও। ______________

____

২. $2N \subseteq N$, যেখানে N সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সেট।

১.৫.৬ সমান সেট (Equal set)

আচ্ছা, তোমাদের কাছে একটি প্রশ্ন করি। মনে করো, A এবং B দুইটি সেট, যেখানে

$A = \{6, 7, 8, 9\}$ এবং $B = \{6, 9, 8, 7\}$

A এবং B এর উপাদানগুলোর দিকে লক্ষ করে দেখো তো। একই মনে হচ্ছে?

তাহলে কি আমরা দাবি করতে পারি যে $A = B$? তোমার যুক্তি নিচে লেখো।

মাথা খাটাও

নিচের দাবি গুলো সত্য কি না চিন্তা করে যুক্তিসহ বল।

১. $A \subseteq B$

২. $B \subseteq A$

দুটি সেটের উপাদান সংখ্যা একই হলে তাদেরকে **সমান সেট** বলে। যদি A এবং B দুইটি সেট হয়, যেখানে, $A \subseteq B$ এবং $B \subseteq A$, তাহলে A এবং B দুইটি সমান সেট (equal set) এবং $A = B$ চিহ্ন দ্বারা লেখা হয়।

উদাহরণ : $A = \{3, 5, 7\}$ এবং $B = \{5, 3, 7\}$ দুইটি সমান সেট। এখানে, $A = B$ দাবি করা যাচ্ছে কারণ $A \subseteq B$ এবং $B \subseteq A$।

আবার, $A = \{3, 5, 7\}$, $B = \{5, 3, 3, 7\}$ এবং $C = \{7, 7, 3, 5, 5\}$ হলেও A, B ও C সেট তিনটি সমান। অর্থাৎ, $A = B = C$.

সেটের উপাদানগুলোর ক্রম বদলালে বা কোনো উপাদান পুনরাবৃত্তি করলে সেটের কোনো পরিবর্তন হয় না।

যাচাই করো

নিচে A এবং B সেটের বিভিন্ন উপাদান উল্লেখ করা আছে। যাচাই করে দেখাও কোন কোন জোড়াগুলো সমান সেট।

১। $A = \{6, 7, 8, 9\}$ এবং $B = \{6, 9, 8, 7\}$

২। $A = \{4, 8, 6, 2\}$ এবং B $=\{x : x$ ধনাত্মক জোড় সংখ্যা এবং $x < 10\}$

৩। $A = \{-1, -2\}$ এবং $B = \{x : x^2 + 3x + 2 = 0$ এর সমাধান$\}$

১.৫.৭ প্রকৃত উপসেট (Proper subset)

প্রত্যেকটি সেট নিজেই নিজের উপসেট। ধরি, A একটি সেট। A ব্যতীত A এর অন্য যে কোনো উপসেটকে A এর **প্রকৃত উপসেট** (proper subset) বলে। $\subset$ চিহ্ন দ্বারা প্রকৃত উপসেটকে নির্দেশ করা হয়। সুতরাং যদি B, A এর একটি প্রকৃত উপসেট হয় তবে লেখা হয় $B \subset A$. অর্থাৎ $B \subseteq A$ কিন্তু $B \neq A$. কোনো সসীম সেট থেকে গঠিত প্রকৃত উপসেটের উপাদান সংখ্যা প্রদত্ত সেটের উপাদান সংখ্যা অপেক্ষা কম হবে।

উদাহরণ : ধরি, $A = \{3, 4, 5, 6\}$ এবং $B = \{3, 5\}$ দুইটি সেট। এখানে $B \subseteq A$ কিন্তু $B \neq$ A. সুতরাং সেট B, সেট A এর একটি প্রকৃত উপসেট।

সমস্যা : $P = \{x, y, z\}$ এর সকল উপসেটগুলো লেখো এবং সেগুলো থেকে প্রকৃত উপসেট বাছাই করো।

সমাধান : দেওয়া আছে, $P = \{x, y, z\}$

P এর উপসেটসমূহ : $\{x, y, z\}$, $\{x, y\}$, $\{x, z\}$, $\{y, z\}$, $\{x\}$, $\{y\}$, $\{z\}$, $\emptyset$

P এর প্রকৃত উপসেটসমূহ : $\{x, y\}$, $\{x, z\}$, $\{y, z\}$, $\{x\}$, $\{y\}$, $\{z\}$, $\emptyset$

মাথা খাটাও

১। কোন সেট সকল সেটের উপসেট?

২। কোন সেট এর সর্বোচ্চ একটি উপসেট থাকবে?

৩। মনে করো, $A = \{1, 2, 3\}$. A এর মোট কয়টি উপসেট থাকতে পারে, কী কী?

৪। সত্যতা যাচাই করো: $2Z \subset Z$, যেখানে Z সকল পূর্ণসংখ্যার সেট।

কোনো সেটের উপাদান সংখ্যা n হলে ওই সেটের উপসেটের সংখ্যা 2^n এবং প্রকৃত উপসেটের সংখ্যা $2^n - 1$.

যাচাই করে খাতায় লেখো।

মনে করো, $P = \{1, 2, 3\}$, $Q = \{2, 3\}$, এবং $R = \{1, 3\}$

১। Q এবং R কি P এর প্রকৃত উপসেট? তোমার উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দাও।

২। Q যদি P এর একটি প্রকৃত উপসেট হয়, তবে এটির প্রকাশ হলো:

৩। P এর মোট কয়টি প্রকৃত উপসেট রয়েছে, নির্ণয় করে দেখাও।

১.৫.৮ সেটের সেট!

মনে করো তোমাদের শ্রেণিতে 18 জন ছেলে আর 22 জন মেয়ে আছে এবং অষ্টম শ্রেণিতে 23 জন ছেলে আর 19 জন মেয়ে আছে।

ধরি, নবম শ্রেণির ছেলেদের সেট A আর মেয়েদের সেট B এবং অষ্টম শ্রেণির ছেলেদের সেট C আর মেয়েদের সেট D। তাহলে আমরা সেট গঠন পদ্ধতিতে লেখতে পারি,

নবম শ্রেণির ছেলেদের সেট $\mathrm{A} = \{x : x$ নবম শ্রেণির ছেলে$\}$

তাহলে, নবম শ্রেণির মেয়েদের সেট এবং অষ্টম শ্রেণির ছেলে ও মেয়েদের সেট, সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ করলে কি দাঁড়াবে, নিচের ঘরে লেখো।

এবার যদি নবম ও অষ্টম শ্রেণির ছেলে মেয়েদের সেট গুলো নিয়ে একটি সেট X গঠন করা হয়, তাহলে আমরা লিখতে পারি,

$X = \{A, B, C, D\}$

এখানে X কে সেটের সেট (set of sets) বলে। এক্ষেত্রে সেট A, সেট X এর একটি উপাদান। অর্থাৎ, $A \in X$.

উদাহরণ : $X = \{\{0, 1\}, \{1, 2, 3\}, \{0, 1, 3\}\}$ একটি সেটের সেট। এক্ষেত্রে $\{0, 1\} \in X$ কিন্তু $0 \notin X$.

১.৫.৯ শক্তি সেট (Power Set)

মনে করো একটি সেট $A = \{x, y\}$. তাহলে A সেটের উপসেটসমূহ হলো $\{x, y\}$, $\{x\}$, $\{y\}$ এবং $\emptyset$। এখানে উপসেটসমূহের সেট $\{\{x, y\}, \{x\}, \{y\}, \emptyset\}$, A সেটের শক্তি সেট। সুতরাং কোনো সেটের সকল উপসেট দ্বারা গঠিত সেটকে ওই সেটের **শক্তি সেট** বলা হয়। A সেটের শক্তি সেটকে $P(A)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণ : $A = \{0, 1, 2\}$ হলে $P(A)$ নির্ণয় করো।

সমাধান : এখানে সেট $\mathrm{A} = \{0, 1, 2\}$ এর উপসেটসমূহ : $\emptyset$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{0, 1\}$, $\{0, 2\}$, $\{1, 2\}$, $\{0, 1, 2\}$.

সুতরাং $P(A) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$

জোড়ায় কাজ:

নিচের সেটগুলোর শক্তি সেট বের করো। একটা করে দেওয়া হলো।

১. $A = \emptyset$. এখানে A এর উপসেট একটি $\emptyset$. সুতরাং $P(A) = \{\emptyset\}$

২. $B = \{a\}$

৩. একটি কলমদানিতে একটি কলম, একটি পেন্সিল এবং একটি রাবার আছে। এদের দ্বারা গঠিত একটি সেট C ।

১.৬ সেটের উপাদান সংখ্যা (Number of elements of a set)

সেটের ব্যবহারে সেটের উপাদান সংখ্যা গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করে। কোনো একটি সেট A এর উপাদান সংখ্যাকে $n(A)$ দ্বারা নির্দেশ করা হয়। যদি A একটি অসীম সেট হয়, তবে $n(A)$ কে ∞ দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। অর্থাৎ A একটি অসীম সেট হলে $n(A) = \infty$.

উদাহরণ : $A = \{0, 1, 2, 3\}$ হলে $n(A) = 4$.

একক কাজ

১. $A = \{0\}$ হলে, $n(A) = \boxed{}$

২. $A = \{a, b, c\}$ হলে, $n(\mathrm{A}) = \boxed{}$

৩. $A = \emptyset$ হলে, $n(A) = \boxed{}$

৪. N সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সেট হলে, $n(N) = \boxed{}$

এবার তাহলে শক্তি সেটের উপাদান সংখ্যা দেখে নেওয়া যাক।

লক্ষ কর: কোনো সেটের উপাদান সংখ্যা n হলে, ওই সেটের উপসেটের সংখ্যা হবে 2^n. সুতরাং শক্তি সেটের উপাদান সংখ্যা হবে 2^n.

একক কাজ: $A = \{0, 1, 2, 3\}$ হলে $P(A)$ নির্ণয় করো।
দেখাও যে, $P(A)$ এর উপাদান সংখ্যা $2^4 = 16$.

১.৭ সেট প্রক্রিয়াকরণ

সংখ্যারাশির ক্ষেত্রে যেমন যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ আছে। এদেরকে সংখ্যারাশির প্রক্রিয়াকরণ বলে। তেমনি সেটের ক্ষেত্রেও প্রক্রিয়াকরণ আছে। এক বা একাধিক সেট থেকে অন্য সেট তৈরি করা যায়। এখন আমরা সেটের প্রক্রিয়াকরণ নিয়ে আলোচনা করব।

১.৭.১ সংযোগ সেট (Union of Sets)

তোমরা আগে খেয়াল করেছ, দুইটি সেটের উপাদানসমূহের মাঝে মিল এবং অমিল থাকতে পারে। এই মিল এবং অমিলের ভিত্তিতে সিদ্ধান্ত গ্রহণের জন্য সেটসমূহের মাঝে কিছু প্রক্রিয়াকরণ করা যায়। একটি উদাহরণ দিয়ে বোঝালে তোমাদের সুবিধা হবে। নবম শ্রেণিতে 4 জন শিক্ষার্থী ফুটবল খেলতে এবং 3 জন শিক্ষার্থী বাস্কেটবল খেলতে পছন্দ করে। ধরি,

যারা ফুটবল পছন্দ করে তাদের রোল নম্বরের সেট $A = \{3, 4, 5, 6\}$

এবং যারা বাস্কেটবল পছন্দ করে তাদের রোল নম্বরের সেট $B = \{1, 4, 6\}$

এখন, বলো তো যারা ফুটবল অথবা বাস্কেটবল খেলা পছন্দ করে তাদের রোল নম্বরের সেট কী হবে এবং এই সেটকে আমরা কীভাবে প্রকাশ করব?

এই সেটকে প্রকাশ করা হয় $A \cup B$ দ্বারা এবং A ও B এর সকল উপাদানকে নিয়ে $A \cup B$ গঠন করা হয়। অর্থাৎ

$$A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6\}$$

দুই বা ততোধিক সেটের সকল উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে **সংযোগ সেট** বলা হয়। মনে করি, A ও B দুইটি সেট। A ও B সেটের সংযোগ সেটকে $A \cup B$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং পড়া হয় A সংযোগ B অথবা A union B. সেট গঠন পদ্ধতিতে লেখা হয়,

$$A \cup B = \{x : x \in \text{A অথবা } x \in B\}$$

উদাহরণ : $A = \{x : x \in Z, -2 < x < 5\}$ এবং $B = \{1, 4, 6, 8\}$ হলে, $A \cup B$ নির্ণয় করো।

সমাধান : শর্ত অনুযায়ী $A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ এবং $B = \{1, 4, 6, 8\}$.

সুতরাং $A \cup B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\} \cup \{1, 4, 6, 8\} = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

১.৭.২ ছেদ সেট (Intersection of Sets)

এখন বলো তো সংযোগ সেটে উল্লেখিত নবম শ্রেণিতে ফুটবল এবং বাস্কেটবল খেলা পছন্দ করা শিক্ষার্থীদের মধ্যে যারা ফুটবল এবং বাস্কেটবল উভয় খেলাই পছন্দ করে তাদের রোল নম্বরের সেট কী হবে এবং এই সেটকে আমরা কীভাবে প্রকাশ করব?

এই সেটকে প্রকাশ করা হয় $A \cap B$ দ্বারা এবং A ও B এর সাধারণ উপাদানকে নিয়ে $A \cap B$ গঠন করা হয়। অর্থাৎ নবম শ্রেণিতের শিক্ষার্থীদের মধ্যে যারা ফুটবল এবং বাস্কেটবল উভয় খেলাই পছন্দ করে তাদের রোল নম্বরের সেট

$$A \cap B = \{4, 6\}$$

দুই বা ততোধিক সেটের সাধারণ উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে **ছেদ সেট** বলা হয়। মনে করি, A ও B দুইটি সেট। A ও B সেটের ছেদ সেটকে $A \cap B$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং পড়া হয় A ছেদ B অথবা A intersection B। সেট গঠন পদ্ধতিতে লেখা হয়,

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ এবং } x \in B\}$$

উদাহরণ : $X = \{x \in Z : -4 < x < 8\}$ এবং $Y = \{x \in N: x$ জোড় সংখ্যা এবং $x \leq 18\}$ হলে, $X \cap Y$ নির্ণয় করো।

সমাধান : শর্ত অনুযায়ী, $X = \{x \in Z : -4 < x < 8\} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

এবং $Y = \{x \in N : x$ জোড় সংখ্যা এবং $x \leq 18\} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$

সুতরাং $X \cap Y = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \cap \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$
$= \{2, 4, 6\}$

১.৭.৩ অন্তর সেট (Set Difference)

কোনো মাদ্রাসা থেকে ৯ম শ্রেণির শিক্ষার্থীদের মধ্যে গণিত অলিম্পিয়াডের জন্য গণিত শিক্ষক 5জনকে নির্বাচন করেছেন। তারা হলো- সামির, নাসরিন, তাহসিন, বশির এবং আমিনা। অন্যদিকে আরবি শিক্ষক কোরআন তেলওয়াত প্রতিযোগিতায় অংশগ্রহণের জন্য 3জনকে নির্বাচন করেছেন। তারা হলো- কোহিনুর, বশির এবং রেজওয়ান। যদি গণিত অলিম্পিয়াডের সেট A এবং কোরআন তেলওয়াতের সেট B হয়, তাহলে আমরা লিখতে পারি,

A = {সামির, নাসরিন, তাহসিন, বশির, আমিনা} এবং B = {কোহিনুর, বশির, রেজওয়ান}

দুইটি প্রতিযোগীতা একই দিনে অনুষ্ঠিত হওয়ায় প্রধান শিক্ষক বললেন, সেট A থেকে সেট B এর সদস্যদের বাদ দিতে হবে। তাহলে A থেকে B কে বাদ দেওয়ার পরে সেটটিকে কীভাবে প্রকাশ করব এবং সেটটির সদস্য কারা হবে?

এই সেটকে প্রকাশ করা হয় $A \setminus B$ দ্বারা এবং A থেকে B এর সদস্য বাদ দিয়ে $A \setminus B$ গঠন করা হয়। অর্থাৎ

$A \setminus B$ = {সামির, নাসরিন, তাহসিন, আমিনা}

এখানে সেট A থেকে বশির বাদ যাবে, কারণ বশির B সেটেরও সদস্য।

একটি সেট থেকে অন্য একটি সেটের সদস্য বাদ দিয়ে গঠিত সেটকে **অন্তর সেট** বলা হয়। সেট A থেকে সেট B এর অন্তর সেটকে $A \setminus B$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং পড়া হয় A অন্তর B অথবা A difference B. সেট গঠন পদ্ধতিতে লেখা হয়,

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ এবং } x \notin B\}$$

উদাহরণ : $P = \{x : x$, 12 এর গুণনীয়ক$\}$ এবং $Q = \{x : x$, 3 এর গুণিতক এবং $x \leq 12\}$ হলে, $P \setminus Q$ নির্ণয় করো।

সমাধান : এখানে, $P = \{x : x$, 12 এর গুণনীয়কসমূহ$\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

এবং $Q = \{x : x$,3 এর গুণিতক এবং $\leq 12\} = \{3, 6, 9, 12\}$

সুতরাং $P \setminus Q = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \setminus \{3, 6, 9, 12\} = \{1, 2, 4\}$

মাথা খাটাও

১. যদি $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ এবং $B = \{1, 2, 2, 3, 1\}$ হয়, তবে $B \setminus A =$ কত হবে? ব্যাখ্যা দাও।

২. যদি $A \subseteq B$ হয়, তবে $A \setminus B =$ কত হবে? ব্যাখ্যা দাও।

১.৭.৪ পূরক সেট (Complement of a Set)

ধরি, সমগ্র পৃথিবীর জনসংখ্যার সেট U এবং যারা বাংলা ভাষায় কথা বলে তাদের সেট A । তাহলে U সার্বিক সেট এবং A সেটটি U এর উপসেট। এবার বলো তো, বাংলা ভাষায় কথা বলে না এমন জনসংখ্যার সেটকে কীভাবে প্রকাশ করা যায়?

এই সেটকে প্রকাশ করা হয় $U \setminus A$ দ্বারা এবং U থেকে A এর সদস্য বাদ দিয়ে $U \setminus A$ গঠন করা হয়। অর্থাৎ $U \setminus A$ হলো বাংলা ভাষায় কথা বলে না এমন জনসংখ্যার সেট।

একটি সেট A এর উপাদানকে এর সার্বিক সেট U এর উপাদান থেকে বাদ দিয়ে গঠিত সেটকে A এর **পূরক সেট** বলা হয়। সেট A এর পূরক সেটকে A^c বা A' দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং পড়া হয় A পূরক অথবা A complement । সেট গঠন পদ্ধতিতে লেখা হয়,

$$A^c = \{x : x \in U \text{ এবং } x \notin A\}$$

উদাহরণ : যদি সার্বিক সেট U সকল অঙ্ক (digits) এর সেট হয়, এবং A সকল জোড় (even) অঙ্ক (digits) এর সেট হয়, তাহলে A^c নির্ণয় করো।

সমাধান : এখানে, $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ এবং $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$

তাহলে, $A^c = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

১.৭.৫ নিশ্ছেদ সেট (Disjoint Set)

কোনো একটি বিদ্যালয়ের ৯ম শ্রেণির শিক্ষার্থীদের ছোটো একটি দল আছে, দলের সদস্য সংখ্যা 9 জন। দলের সদস্যদের রোল নম্বর খুব মজার। প্রথম 9টি মৌলিক সংখ্যা। তাদের কেউ গান করে, কেউবা আবার নাচ করে। যারা নাচ অথবা গান কোনটিই করে না, তারা উৎসাহ দেয়। বিদ্যালয়ের সহশিক্ষা কার্যক্রমে তারা একটি দলগত উপস্থাপনা দিতে চাইছে। কে কী করে, তাদের রোল নম্বর অনুসারে নিচে দেখো।

দলের সদস্যদের রোল নম্বরের সেট U হলে, U কে তালিকা পদ্ধতিতে এখানে লেখো :

গান করে যারা তাদের রোল নম্বরের সেট, $E = \{5, 11, 17, 23\}$

$U =$

এবং নাচ করে যারা তাদের রোল নম্বরের সেট, $F = \{2, 7, 13\}$

লক্ষ করো, $E \cap F = \emptyset$, অর্থাৎ, তাদের পক্ষে একটি সাধারণ দলগত উপস্থাপনা দেওয়া সম্ভব নয়। এমন ক্ষেত্রে বলা যায়, E এবং F পরস্পরের **নিশ্ছেদ সেট**।

দুইটি সেট A এবং B কে **নিশ্ছেদ সেট** বলা হয় যদি $A \cap B = \emptyset$ হয়।

যাচাই করো

উপরের সমস্যাটির প্রেক্ষিতে নিচের সেট দুইটি নির্ণয় করো এবং সেট দুইটি সম্পূর্ণ দলের প্রেক্ষিতে কী নির্দেশ করে লেখ।

১। $E^c \cup F^c$

২। $E^c \cap F^c$

১.৮ চিত্র দিয়ে ক্রীড়া সমস্যার সমাধান

নিতুদের বিদ্যালয়ে বার্ষিক ক্রীড়া ও সাংস্কৃতিক প্রতিযোগিতা আয়োজিত হবে। শ্রেণিশিক্ষক আঁখি আপা নিতুদের শ্রেণি থেকে নাম নিবেন কে কীসে অংশগ্রহণ করবে। শর্ত হলো নবম শ্রেণির কেউ তিনটির বেশি কর্মকাণ্ডে অংশগ্রহণ করতে পারবে না। আপা বললেন, "সবাই অবশ্য তিনটির সব কয়টিতে অংশগ্রহণ করবে এমনও নয়। আমাদের একটি সিদ্ধান্তে এসে পৌঁছুতে হবে। ধরো আমাদের হাতে রয়েছে দলগত ক্রীড়া, একক ক্রীড়া এবং সাংস্কৃতিক কর্মকাণ্ড।" এই বলে নিচের ছবির মতো তিনটি বৃত্ত আঁকলেন বোর্ডে।

তারপর বললেন, “শুধু দলগত খেলা, যেমন ক্রিকেট বা ফুটবলে কে কে অংশগ্রহণ করতে চাও?” ক্লাসে যারা বিদ্যালয়ের বিভিন্ন খেলার দলে আছে তেমন আটজন হাত তুললো আর আপা তাদের রোল নম্বর দলগত ক্রীড়ার বৃত্তে লিখে দিলেন। এমন করে একে একে একক খেলা এবং সাংস্কৃতিক প্রতিযোগিতায় অংশগ্রহণ করতে চায় এমন শিক্ষার্থীদের রোল নম্বরও ঠিক ঠিক বৃত্তের ঘরে লিখে দিলেন।

এরপর আপা বললেন, “এমন কেউ কি আছো যারা দলগত এবং একক ক্রীড়ার দু’টোতেই অংশগ্রহণ করতে চাও?” উৎস, শরীফ আর নাজমুল ফুটবল দলে ছিল, ওরা দৌড়ে নাম দিতে চায়। আবার সীমা আর অপর্ণা একক খেলায় নাম দিয়েছিল, ওরা ভলিবলও খেলতে চায়। ওদের রোল দলগত আর একক থেকে মুছে দলগত আর এককের বৃত্ত যেখানে একে অপরকে ছেদ করেছে সেই ঘরে লিখে দিলেন।

এমনি করে দলগত ক্রীড়া আর সাংস্কৃতিক কর্মকান্ড এবং একক ক্রীড়া আর সাংস্কৃতিক কর্মকান্ডে যথাক্রমে পাঁচজন ও ছয় জনের রোল নম্বর উঠলো। সব শেষে আপা জিজ্ঞেস করলেন, এবার বলো এমন কেউ আছো যে তিনটিতে অংশগ্রহণ করতে চাও? উৎস তাড়াতাড়ি হাত তুলে বলল, “আপা আমি একটা কবিতা আবৃত্তি করতে চাচ্ছিলাম।” আপা বললেন, “খুব ভালো কথা উৎস!” এবার আপা উৎসের রোল পূর্বের জায়গা থেকে মুছে দলগত, একক এবং সাংস্কৃতিক বৃত্ত তিনটি যেখানে ছেদ করেছে সেই ঘরে লিখে দিলেন।

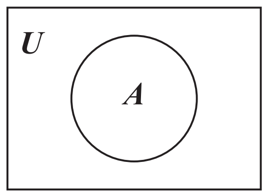
দেখলে তো কী সহজে আপা জটিল একটা সমস্যার সহজ সিদ্ধান্ত নিয়ে ফেললেন! শুধু তাই নয়, বোর্ডে চাক্ষুষ উপস্থাপনাও দেখা গেল। যে চিত্রের মাধ্যমে এই উপায়ে উপস্থাপন করা হয় তাকে ভেন চিত্র (Venn diagram) বলে।

১.৮.১ ভেন চিত্র (Venn Diagram)

ভেন চিত্রের নামকরণ করা হয়েছে এর আবিষ্কারক ইংরেজ দার্শনিক ও যুক্তিবিদ জন ভেন (John Venn) এর নামানুসারে।

(John Venn)

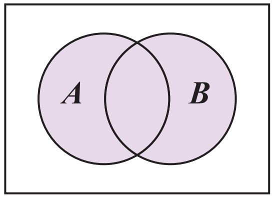
ভেন চিত্রে সার্বিক সেটকে একটি সমতলে আয়তাকার জ্যামিতিক আকার দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং ওই সার্বিক সেটের উপসেটগুলোকে ওই আয়তাকার ক্ষেত্রের ভিতরে বৃত্তের মাধ্যমে উপস্থাপন করা হয়। পাশের ভেন চিত্রে সার্বিক সেট U এবং তার একটি উপসেট A দেখানো হয়েছে।



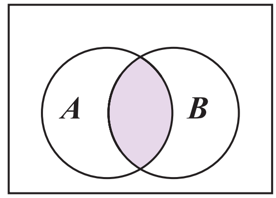
ভেন চিত্রের মাধ্যমে কীভাবে সেটের অপারেশনগুলো উপস্থাপন করা যায় তা নিচে দেখানো হলো। পরবর্তীতে সেট প্রকাশের কাজে আমরা ভেনচিত্র ব্যবহার করব।

১.৮.২ ভেন চিত্রের মাধ্যমে সেট প্রক্রিয়াকরণ

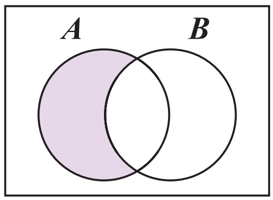
যে কোনো সেট A ও B এর জন্য, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ এবং A^c এর ভেন চিত্র নিচে দেয়া হলো।



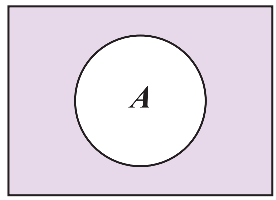
$A \cup B$



$A \cap B$



$A \backslash B$



A^c

১.৮.৩ বাস্তব সমস্যায় ভেন চিত্র

সমস্যা-১. পছন্দের তালিকায় ইলিশ মাছ

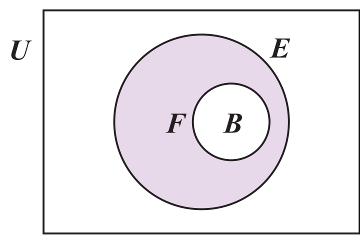
ইলিশ মাছ পছন্দ করেন না এমন বাংলাদেশি খুব কমই আছে। বাংলাদেশি নন কিন্তু ইলিশ মাছ পছন্দ করেন এমন মানুষও আছেন। সমগ্র পৃথিবীতে জনসংখ্যা যত, তাদের মাঝে বাংলাদেশি নন কিন্তু ইলিশ মাছ পছন্দ করেন এমন ব্যক্তিদের সেটটি কেমন হবে চিন্তা করতে পার? একটু বিশ্লেষণ করা যাক।

ধরি, সমগ্র পৃথিবীর জনসংখ্যার সেট U

ইলিশ মাছ পছন্দ করেন এমন মানুষের সেট E

বাংলাদেশি নন কিন্তু ইলিশ মাছ পছন্দ করেন এমন মানুষের সেট F

বাংলাদেশি এবং ইলিশ মাছ পছন্দ করেন এমন মানুষের সেট B



$F = E \backslash B$

বাংলাদেশি নন কিন্তু ইলিশ মাছ পছন্দ করেন এমন মানুষের সেটটি ভেন চিত্রের মাধ্যমে পাশে নির্দেশ করা হলো।

মাথা খাটাও

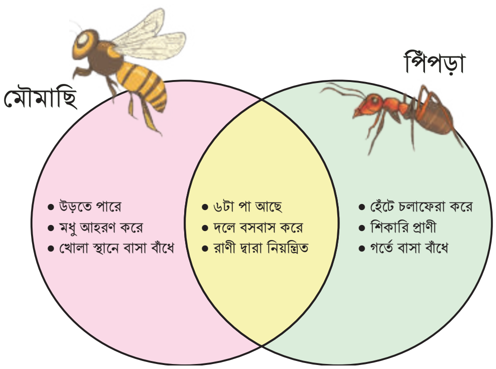
যে কোনো সেট A, B, C এর জন্য নিচের সেটগুলোকে ভেন চিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ করো।

১. $A \cup B \cup C$ ২. $(A \cap B)^c$ ৩. $A \cap (B \cup C)$

সমস্যা-২. মৌমাছি এবং পিঁপড়ার বৈশিষ্ট্য

নিচে পিঁপড়া এবং মৌমাছির কিছু বৈশিষ্ট্য উল্লেখ করা হলো। ভেন চিত্রের মাধ্যমে তাদের সাধারণ বৈশিষ্টগুলো বের করো।

 মৌমাছির কিছু বৈশিষ্ট্য	 পিঁপড়ার কিছু বৈশিষ্ট্য
• 6টি পা আছে	• 6টি পা আছে
• দলে বসবাস করে	• হেঁটে চলাফেরা করে
• উড়তে পারে	• দলে বসবাস করে
• মধু আহরণ করে	• শিকারী প্রাণী
• রাণী দ্বারা নিয়ন্ত্রিত	• গর্তে বাসা বাঁধে
• খোলা স্থানে বাসা বাঁধে	• রাণী দ্বারা নিয়ন্ত্রিত



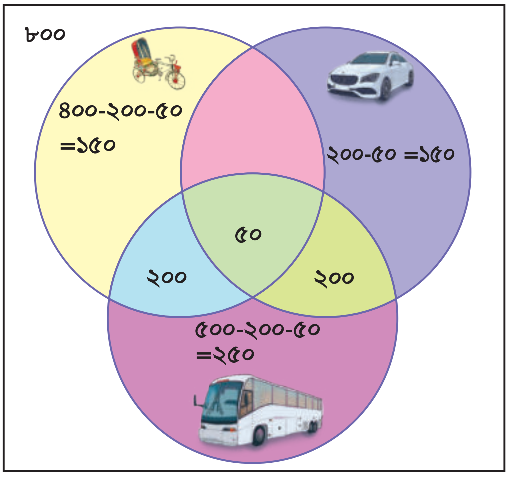
সমাধান : ধরি, মৌমাছির বৈশিষ্ট্যের সেট A এবং পিঁপড়ার বৈশিষ্ট্যের সেট B.

তাদের বৈশিষ্ট্যগুলো ভেন চিত্রের মাধ্যমে এমনভাবে উপস্থাপন করা হয়েছে যেন তাদের সাধারণ বৈশিষ্ট্যগুলো $A \cap B$ তে থাকে। পাশের ভেন চিত্র অনুযায়ী সাধারণ বৈশিষ্ট্যগুলো :

$A \cap B$ = {6 টি পা আছে, দলে বসবাস করে, রাণী দ্বারা নিয়ন্ত্রিত হয়}

সমস্যা-৩. যাতায়াত ব্যবস্থা

একটি শহরের 800 জন মানুষের উপর একটি জরিপ করে দেখা গেল যে, 500 জন মানুষ বাসে যাতায়াত করে, 200 জন মানুষ গাড়িতে যাতায়াত করে, 400 জন মানুষ রিক্সায় যাতায়াত করে, 200 জন মানুষ বাস এবং রিক্সা উভয়েই যাতায়াত করে কিন্তু গাড়িতে যাতায়াত করে না এবং 50 জন মানুষ বাস, রিক্সা এবং গাড়িতে যাতায়াত করে। অন্যরা পায়ে হেঁটে যাতায়াত করে। কত জন মানুষ পায়ে হেঁটে যাতায়াত করে তা ভেন চিত্রের মাধ্যমে উপস্থাপন করে নির্ণয় করো।



সমাধান : মনে করি, জরিপকৃত মানুষের সেট U, বাসে যাতায়াতকারী মানুষের সেট B, গাড়িতে যাতায়াতকারী মানুষের সেট C, রিক্সায় যাতায়াতকারী মানুষের সেট R এবং পায়ে হেঁটে যাতায়াতকারী মানুষের সেট W.

তাহলে, $n(U) = 800$ জন, $n(B) = 500$ জন, $n(C) = 200$ জন, $n(R) = 400$ জন

ভেনচিত্র অনুযায়ী, তিনটি যানবাহনেই যাতায়াত করে এমন মানুষের সেট $B \cap R \cap C$

$$\therefore n(B \cap R \cap C) = 50 \text{ জন}$$

বাস ও রিক্সায় উভয়েই যাতায়াত করে কিন্তু গাড়িতে যাতায়াত করে না এমন মানুষের সংখ্যা

$$n(B \cap R \cap C^c) = 200 \text{ জন}$$

শুধু বাসে যাতায়াত করে $n(B) - n(B \cap R \cap C^c) - n(B \cap R \cap C)$

$= (500 - 200 - 50)$ জন

$= (500 - 250)$ জন

$= 250$ জন

শুধু রিক্সায় যাতায়াত করে $n(R) - n(B \cap R \cap C^c) - n(B \cap R \cap C)$

নিচের বক্সে হিসাব করে বের করো

শুধু গাড়িতে যাতায়াত করে $n(C) - n(B \cap R \cap C)$

$= (200 - 50)$ জন

$= 150$ জন

$\therefore$ কমপক্ষে যে কোনো একটি যানবাহনে যাতায়াত করে $n(B \cup R \cup C)$ [প্রদত্ত খালি ঘরে হিসাব করো।]

সুতরাং, পায়ে হেঁটে যাতায়াত করে $n(W) = n(U) - n(B \cup R \cup C)$

$= (800 - 800)$ জন

$= 0$ জন

সুতরাং, কোনো মানুষ পায়ে হেঁটে যাতায়াত করে না।

১.৯ সেটের কার্তেসীয় গুণজ (Cartesian product of sets)

ধরি, A একটি রঙের সেট যেখানে দুই ধরনের রং আছে, যথা– সাদা এবং কালো, অর্থাৎ A = {সাদা, কালো} এবং B একটি পোশাকের সেট যেখানে তিন ধরনের পোশাক আছে, যথা– শার্ট ,প্যান্ট, পাঞ্জাবি, অর্থাৎ B = {শার্ট, প্যান্ট, পাঞ্জাবি}. তাহলে, প্রথমে রং এবং পরে পোশাক এই ক্রমে আমরা নতুন একটি সেট তৈরি করতে পারি। এই সেটকে $A \times B$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এখন প্রশ্ন হচ্ছে, প্রথমে রং এবং পরে পোশাক এই ক্রমে আমরা কতটি উপাদান তৈরি করতে পারি? নিচের সারণীটি লক্ষ করো। এখানে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কের মতো একদিকে রং এবং অন্য দিকে পোশাকের সেট ব্যবহার করে ক্রমোজোড় হিসাবে $A \times B$ এর উপাদান তৈরি করা হয়েছে।

	শার্ট	প্যান্ট	পাঞ্জাবি
সাদা	(সাদা, শার্ট)	(সাদা, প্যান্ট)	(সাদা, পাঞ্জাবি)
কালো	(কালো, শার্ট)	(কালো, প্যান্ট)	(কালো, পাঞ্জাবি)

অর্থাৎ

$A \times B$ = {(সাদা, শার্ট), (সাদা, প্যান্ট), (সাদা, পাঞ্জাবি), (কালো, শার্ট), (কালো, প্যান্ট), (কালো, পাঞ্জাবি)}

সুতরাং আমরা লিখতে পারি,

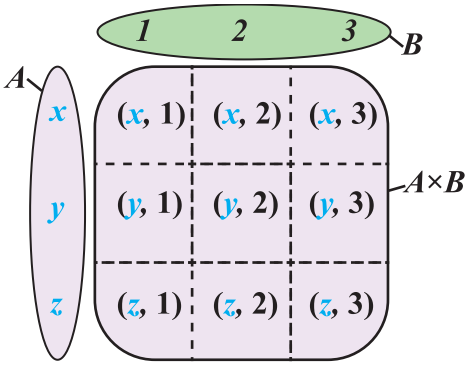
$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

উদাহরণ : যদি $A = \{x, y, z\}$ এবং $B = \{1, 2, 3\}$ হয়, তবে

$A \times B = \{(x, 1), (x, 2), (x, 3), (y, 1), (y, 2), (y, 3), (z, 1), (z, 2), (z, 3)\}$

নিচে ছক ১.২ দেওয়া হলো।

ছক ১.২



লক্ষ কর: (i) $(x, 1) \in A \times B$ কিন্তু $(1, x) \notin A \times B$.

(ii) $(x, y) = (u, v)$ যদি এবং কেবল যদি $x = u$ এবং $y = v$ হয়।

(iii) যে কোনো সেট A এর জন্য $A \times \emptyset = \emptyset$

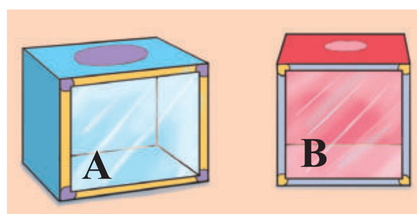
মাথা খাটাও

১। $n(A) = 3$ এবং $n(B) = 2$ হলে, $n(A \times B) = ?$

২। $n(A) = p$ এবং $n(B) = q$ হলে, $n(A \times B) = ?$

১.১০ দলগত কাজ/ প্রজেক্ট

শিক্ষক বিভিন্ন খেলার নাম ছোটো ছোটো কাগজে লিখে ভাজ করে দুইটি বক্সে (A ও B) রাখবেন। প্রতি বক্সে কমপক্ষে 5টি খেলার নাম থাকবে।



এবার শিক্ষকের নির্দেশমতো শিক্ষার্থীরা ৯ জন (বা যে কোনো বিজোড় সংখ্যক) করে দলে বিভক্ত হবে। প্রতি দলের দলনেতা A ও B বক্স থেকে একটি করে মোট দুটি খেলার নাম তুলে নেবে এবং দলের অন্য সদস্যের থেকে প্রশ্ন করে জেনে নেবে যে, লটারিতে পাওয়া খেলা দুইটির মধ্যে কোনটি তারা খেলতে পছন্দ করে।

তাদের সম্ভাব্য উত্তর হতে পারে : (ক) দুটিই পছন্দ করে (A ও B), (খ) যে কোনো একটি পছন্দ করে (A অথবা B), (গ) কোনোটিই পছন্দ করে না। এবার খাতায় একটি নামের তালিকা করো যে, কারা A পছন্দ করে, কারা

B পছন্দ করে, এবং কারা কোনোটিই পছন্দ করে না। যদি কেউ দুটি খেলাই পছন্দ করে, তবে তার নাম A ও B দুটি তালিকাতেই থাকবে। এবার নিচের কাজগুলো সম্পন্ন করে শ্রেণিতে উপস্থাপন করো।

১। তোমাদের সংগৃহীত তথ্য তালিকা পদ্ধতিতে উপস্থাপন করো।

ক) U = {দলের সকল শিক্ষার্থীর নাম যাদের কাছ থেকে তথ্য নেয়া হয়েছে}

খ) A = {যারা A গ্রুপের খেলা পছন্দ করে}

গ) B = {যারা B গ্রুপের খেলা পছন্দ করে}

২। উপরের ‘ক’, ‘খ’ ও ‘গ’ এর তথ্যগুলো একটি ভেন চিত্রে উপস্থাপন করো। যারা A ও B এর কোনোটিই পছন্দ করে না, তাদেরকেও ভেন চিত্রে উল্লেখ করো।

৩। এবার সেটের অপারেশন থেকে প্রাপ্ত সংখ্যা দিয়ে নিচের ছকটি পূরণ করো।

$n(A)$	
$n(B)$	
$n(A \cap B)$	
$n(A \cup B)$	
$n(\cup)$	

$n(A^c)$	
$n(B^c)$	
$n(A \cup B)^c$	
$n(A \cap B)^c$	

৪। নিচের সমীকরণগুলোর সত্যতা যাচাই করো।

ক) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

খ) $n(U) = n(A) + n(A^c)$

গ) $n(A \backslash B) = n(A) - n(A \cup B)$

ঘ) $n(A^c \cap B^c) = n(U) - n(A \cup B)$

শেষ কথা

জর্জ ক্যান্টরের সেট তত্ত্বের উপর ভিত্তি করে গণিতের প্রায়োগিক শাখার অনেক গুরুত্বপূর্ণ আবিষ্কার হয়েছে, যেগুলো তোমরা উচ্চ মাধ্যমিক এবং বিশ্ববিদ্যালয় পর্যায়ে শিখবে। এই শ্রেণিতে সেট পড়ার পদ্ধতি, প্রকাশের পদ্ধতি, বিভিন্ন প্রকারভেদ, উপসেটের নানান প্রকার, ভেন চিত্রে প্রকাশ এবং ক্রমজোড়ের ব্যবহার শিখলে। আশা করা যায় এই ব্যবহারগুলো তোমাদের চিন্তা এবং বিশ্লেষণের জগত প্রসারিত করবে এবং বাস্তব জীবনে এই দক্ষতা প্রয়োগ করে জটিল সমস্যার সমাধান করতে পারবে।

অনুশীলনী

১। তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ করো :

ক) $A = \{x \in N : -3 < x \leq 5\}$

খ) $B = \{x \in Z : x$ মৌলিক সংখ্যা এবং $x^2 \leq 50\}$

গ) $C = \{x \in Z : x^4 < 264\}$

২। সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ করো :

ক) $A = \{1, 3, 5, \ldots, 101\}$

খ) $B = \{4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$

৩। যদি $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{0, 1, 3, 5, 6\}$ এবং $C = \{1, 5, 6\}$ হয়, তবে নিচের সেটগুলো নির্ণয় করো।

ক) $A \cup \mathrm{B}$ খ) $A \cap C$ গ) $B \setminus C$ ঘ) $A \cup (B \cap C)$ ঙ) $A \cap (B \cup C)$

৪। যদি $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{0, 2, 4, 6\}$ এবং $C = \{3, 4, 5, 6, 7]$ হয়, তবে নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে সত্যতা যাচাই করো :

ক) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ খ) $(B \cap C)^c = B^c \cup C^c$

গ) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cap (B \cap C)$ ঘ) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

৫। মান নির্ণয় করো :

ক) $N \cap 2N$ খ) $N \cap A$ গ) $2N \cap P$

যেখানে, N সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সেট, $2N$ সকল ধনাত্মক জোড় সংখ্যার সেট, A সকল বিজোড় সংখ্যার সেট, P সকল মৌলিক সংখ্যার সেট।

৬। ধরি U সকল ত্রিভুজের সেট হয় এবং A সকল সমকোণী ত্রিভুজের সেট। তাহলে সেট A^c বর্ণনা করো।

৭। ভেন চিত্রের মাধ্যমে দেখাও যে, যে কোনো সেট A, B, C এর জন্য-

ক) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ খ) $(B \cap C)^c = B^c \cup C^c$

গ) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ ঘ) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

৮। কোনো শ্রেণির 40 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 25 জন পাখি পছন্দ করে এবং 15 জন বিড়াল পছন্দ করে। পাখি ও বিড়াল দুটি প্রাণীই পছন্দ করে এরূপ শিক্ষার্থীর সংখ্যা 10 জন। কতজন শিক্ষার্থী পাখি ও বিড়াল কোনোটিই পছন্দ করে না তা ভেন চিত্রের সাহায্যে নির্ণয় করো।

৯। যদি $P = \{a, b\}$, $Q = \{0, 1, 2\}$ এবং $R = \{0, 1, a\}$ হয়, তবে নিচের রাশিগুলোর মান নির্ণয় করো।

ক) $P \times Q, P \times P, Q \times Q, Q \times P$ এবং $P \times \emptyset$

খ) $(P \times Q) \cap (P \times R)$

গ) $P \times (Q \cap R)$

ঘ) $(P \times Q) \cap R$

ঙ) $n(P \times Q), n(Q \times Q)$

চ) (গ) এবং (ঘ) এর সমতার বিষয়ে তোমার যুক্তি উপস্থাপন করো।

১০। $P = \{0, 1, 2, 3\}$, $Q = \{1, 3, 4\}$ এবং $R = P \cap Q$ হলে,

(i) $P \times R$ এবং $R \times Q$ নির্ণয় করো।

(ii) $n(P \times R)$ এবং $n(R \times Q)$ এর মান বের করো।

১১। যদি $P \times Q = \{(0, a), (1, c), (2, b)\}$ হয়, তবে P এবং Q নির্ণয় করো।

অনুক্রম ও ধারা

এই অভিজ্ঞতায় শিখতে পারবে-

- অনুক্রম
- সমান্তর অনুক্রম
- গুণোত্তর অনুক্রম
- ফিবোনাচ্চি অনুক্রম
- ধারা
- সমান্তর ধারা
- গুণোত্তর ধারা

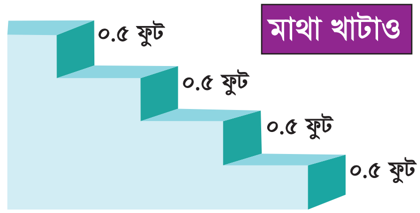
অনুক্রম ও ধারা

তোমার প্রাত্যহিক জীবনে 'ক্রম' শব্দটি বহুল পরিচিতি একটি শব্দ, তাই না? প্রতিদিন কত জিনিসই না তোমাকে ক্রমানুসারে সাজাতে হয়। তোমার পড়ার টেবিল বা পাশের বুক সেলফটির কথা ভাবো। আকারে সবচেয়ে বড় বইগুলো নিশ্চয়ই সবার নিচে রেখেছ। তারপর ক্রমানুসারে ছোটগুলো উপরের দিকে তাক করে রাখা আছে। তোমার স্কুলের ক্লাস শুরুর আগে তোমাদেরকে সমাবেশে অংশগ্রহণ করতে হয়। খেয়াল করেছ কি তোমাদের প্রতিটি কলামে দাঁড়ানোর ক্ষেত্রে একটি নিয়ম মানতে হয়। তোমাদেরকে তোমাদের উচ্চতার ক্রম অনুসারে দাঁড়াতে হয়। সমাবেশ শেষে ক্লাসে যাওয়ার পরই শ্রেণিশিক্ষক তোমাদের উপস্থিতি নেন। তোমাদের রোল নম্বর কীভাবে সাজানো? নিশ্চয়ই ক্রমানুসারে, তাই না? এত গেল তোমার স্কুলের কথা, তুমি বাজারে গিয়ে নিশ্চয়ই লক্ষ করেছ, কোনো কোনো দোকানি দোকানের জিনিসপত্র নানান রকমে সাজিয়ে রাখেন। যেমন: ফলের দোকানদার আপেল, কমলা সুষম পিরামিডের মতো সাজিয়ে রাখেন। হাঁড়ি-পাতিল, থালা-বাসন, বালতি-মগ বিক্রেতারাও তাদের দ্রব্যাদি বড় থেকে উপরের দিকে ক্রমানুসারে ছোটো আকারে সাজিয়ে রাখেন। খেলার মাঠের গ্যালারির আসন ব্যবস্থার কথা চিন্তা করো। এমনকি সিনেমা হলে দর্শকদের বসার ক্রম? নিচের ছবি দুটি নিবিড়ভাবে পর্যবেক্ষণ করো।

আসন ব্যবস্থা ও মাটির পাতিলগুলোর মধ্যে কোনো বৈশিষ্ট্য আছে কী? সহপাঠীর সাথে আলাপ-আলোচনা করো। তোমরা কী কী বৈশিষ্ট্য খুঁজে পেলে তা নিচের খালি বক্সে লেখো।

আমরা আমাদের চারপাশে নানাবিধ ক্ষেত্রে বিভিন্ন ধরনের ক্রম দেখে থাকি। আর এই ক্রম থেকেই মূলত অনুক্রমের ধারণাটি এসেছে। তাছাড়া তোমরা ইতোমধ্যেই সংখ্যা পদ্ধতি সম্পর্কে অনেক কিছুই জেনেছ। যেমন: স্বাভাবিক সংখ্যা $1, 2, 3, 4, \ldots$ এর কথা ভাবতে পার। সংখ্যাগুলো ক্রমানুসারে সাজানো ছাড়াও আরও বিশেষ বৈশিষ্ট্য থাকতে পারে। ভেবে দেখো তো আর কী কী বৈশিষ্ট্য আছে? বৈশিষ্ট্যগুলো নিচের খালি বক্সে ঝটপট লিখে ফেলো:

মাথা খাটাও



ছবিতে প্রদর্শিত সিঁড়ির ভূমি থেকে প্রতিটি ধাপের উচ্চতা কত? প্রাপ্ত উত্তরগুলোর মধ্যে কোনো বৈশিষ্ট্য আছে কী?

দুইটি মজার খেলা

১. হাত খরচ প্রাপ্তির খেলা

মনে করো, তোমাকে এক মাসের জন্য প্রতিদিন কিছু হাত খরচ দেয়া হবে। হাত খরচ প্রাপ্তির জন্য তোমাকে তিনটি বিকল্প দেওয়া হলো যার মধ্য থেকে যে কোনো একটি তোমাকে বেছে নিতে হবে। বিকল্পগুলো নিম্নরূপ:

ক) প্রতিদিন 10 টাকা

খ) মাসের প্রথম দিন 3 টাকা, দ্বিতীয় দিন 3.50 টাকা, তৃতীয় দিন 4 টাকা, এভাবে প্রতিদিন 50 পয়সা করে বৃদ্ধি পাবে

গ) মাসের প্রথম দিন 1 টাকা, দ্বিতীয় দিন 2 টাকা, তৃতীয় দিন 4 টাকা, এভাবে প্রতিদিন আগের দিনের দ্বিগুণ করে বৃদ্ধি পাবে

এই তিনটি বিকল্পের মধ্য থেকে তুমি কোনটি বেছে নিবে এবং কেন নিবে তা যুক্তি ও ব্যাখ্যাসহ তোমাকে উপস্থাপন করতে হবে।

২. মৌলিক সংখ্যার খেলা

কমপক্ষে তিনটি মৌলিক সংখ্যা খুঁজে বের করতে হবে। শর্ত হলো: পাশাপাশি দুইটি সংখ্যার পার্থক্য সাধারণ বা একই হতে হবে এবং শর্ত মেনে খালি ঘরগুলো পূরণ করতে হবে। যদি শর্ত মেনে তিনটি সংখ্যা না পাওয়া যায়, তবে তার কারণ ব্যাখ্যা করো।

সাধারণ পার্থক্য	১ম সংখ্যা	২য় সংখ্যা	৩য় সংখ্যা	.....
2	3	5	7	
4				
9				
10				
14				
20				

এতক্ষণ তোমরা যে বিষয়গুলো নিয়ে ভাবনা-চিন্তা করলে তার প্রতিক্ষেত্রে প্রাপ্ত সংখ্যা বা বস্তুগুলো সাজানোর মধ্যে বিশেষ বৈশিষ্ট্য আছে, তাই না? এই বৈশিষ্ট্য বা নিয়মটিকেই আমরা প্যাটার্ন বলে থাকি। পূর্বের শ্রেণিতে প্যাটার্ন সম্পর্কে তোমরা জেনেছ।

তোমার হাত খরচ প্রাপ্তির মজার খেলার মধ্যে-

ক)-এ মাসের প্রতিদিন যে হাত খরচ পেয়েছ তা নিম্নরূপ।

দিন	1	2	3	4	…	30
টাকা	10	10	10	10	…	10

খ)-এ মাসের প্রতিদিন যে হাত খরচ পেয়েছ তা নিম্নরূপ।

দিন	1	2	3	4	…	30
টাকা	3.00	3.50	4.00	4.50	…	18.50

গ)-এ মাসের প্রতিদিন যে হাত খরচ পেয়েছ তা নিম্নরূপ।

দিন	1	2	3	4	…	30
টাকা	1	2	4	8	…	536,870,912

উপরের উদাহারণগুলো লক্ষ করলে দেখতে পাবে যে, প্রতি ক্ষেত্রেই হাত খরচ প্রাপ্তির অর্থ দিনের সংখ্যার $\{1, 2, 3, 4 \ldots 30\}$ সাথে সম্পর্কযুক্ত। দিনের সংখ্যা $\{1, 2, 3, 4 \ldots 30\}$ হলো স্বাভাবিক সংখ্যার একটি সসীম সেট। এখানে দিনের সংখ্যার সাথে টাকার পরিমাণের একটি সম্পর্ক আছে। এই সম্পর্কটিই একটি অনুক্রম।

স্বাভাবিক সংখ্যার সেটের সাথে অন্য একটি সংগ্রহের সম্পর্ককে অনুক্রম বলা হয়।

উপরের উদাহরণে প্রতিদিনের সাপেক্ষে টাকার পরিমাণের সংগ্রহ হলো একেকটি অনুক্রম। কোনো অনুক্রমের প্রতিটি উপাদানকে এর একেকটি পদ বলে। অনুক্রমের প্রথম উপাদানটিকে প্রথম পদ, দ্বিতীয়টিকে দ্বিতীয় পদ, তৃতীয়টিকে তৃতীয় পদ, এভাবে ক্রমানুসারে পদগুলোর নামকরণ করা হয়। যে কোনো স্বাভাবিক সংখ্যা n এর জন্য, অনুক্রমের সাধারণ পদকে n-তম পদ বলা হয়। যদি কোনো অনুক্রমের প্রথম পদ a_1, দ্বিতীয় পদ a_2, তৃতীয় পদ a_3, ... এবং nতম পদ a_n হয় তবে, অনুক্রমটি লিখতে পারি, $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$। একে (a_n) দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

উদাহরণ ০১:

$1, 1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots$ একটি অনুক্রম যার n-তম পদ $a_n = 1$। এটি একটি ধ্রুবক অনুক্রম। তোমরা কি এর কারণ বলতে পারবে? একটু খেয়াল করে দেখো, এই অনুক্রমের প্রত্যেকটি পদ একই। এর কোনো পরিবর্তন নেই। এই ধরনের অনুক্রমকে ধ্রুবক অনুক্রম (constant sequence) বলে।

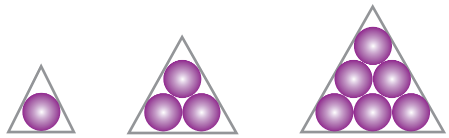
একক কাজ

ধ্রুবক অনুক্রমের দুইটি উদাহরণ দাও এবং প্রত্যেকটির n-তম পদ লেখো।

উদাহরণ ০২: $1, -1, 1, -1, \ldots$ একটি অনুক্রম যার n-তম পদ $a_n = (-1)^{n+1}$। একে $((-1)^{n+1})$দ্বারা নির্দেশ করা হয়। এটি একটি পর্যায়ক্রমিক অনুক্রম। তোমরা কি এর কারণ বলতে পারবে? একটু খেয়াল করে দেখো, এই অনুক্রমের পদগুলো কীভাবে আসছে? এখানে দুইটি পদ পর্যায়ক্রমিকভাবে ফিরে আসছে। এজন্য এই ধরনের অনুক্রমকে পর্যায়ক্রমিক অনুক্রম বলে। বাস্তব জীবনে প্রতিদিন যে জোয়ার-ভাটা হয়, তা একটি পর্যায়ক্রমিক অনুক্রমের উদাহরণ।

একক কাজ: পর্যায়ক্রমিক অনুক্রমের দুইটি উদাহরণ দাও এবং প্রত্যেকটির n-তম পদ লেখো।

উদাহরণ ০৩: $1, 3, 6, 10, \ldots$ একটি অনুক্রম। একে সমবাহু ত্রিভুজ সংখ্যার অনুক্রম বলে, কারণ অনুক্রমের পদগুলো পাশের চিত্রের সমবাহু ত্রিভুজ আকৃতির বলের সংখ্যা থেকে এসেছে।



চিত্র-১(ক) চিত্র-১(খ) চিত্র-১(গ)

একক কাজ

বর্গাকার সংখ্যার অনুক্রমটি লেখো এবং বর্গের সাহায্যে চিত্রিত করো।

উদাহরণ ০৪: $1, 3, 5, 7, \ldots, (2n-1), \ldots$ একটি অনুক্রম যার n-তম পদ $a_n = 2n - 1$। এটি বিজোড় সংখ্যার অনুক্রম।

উদাহরণ ০৫: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$ একটি অনুক্রম যার n-তম পদ $a_n = \frac{n}{n+1}$. একে $\left(\frac{n}{n+1}\right)$ দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

উদাহরণ ০৬: $1, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \ldots, \frac{n}{2n-1} \ldots$ একটি অনুক্রম যার n-তম পদ $a_n = \frac{n}{2n-1}$. বলো তো একে কী দ্বারা নির্দেশ করা হবে?

জোড়ায় কাজ

ক) নিচের অনুক্রমগুলোর সাধারণ পদ নির্ণয় করো:

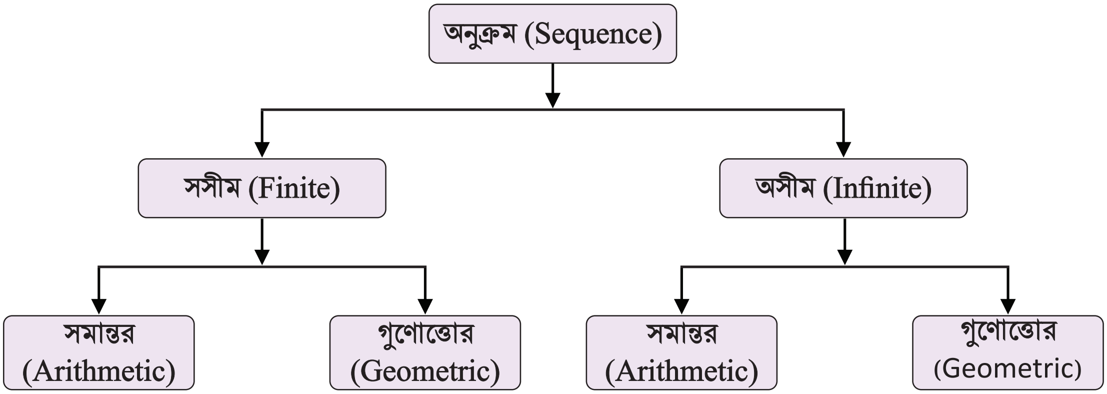
i) $3, 6, 9, \ldots$ ii) $5, -25, 125, -625, \ldots$

iii) $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \ldots$ iv) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{4}{2^4} \ldots$

খ) প্রদত্ত সাধারণ পদ থেকে অনুক্রমগুলো নির্ণয় করো:

i) $\frac{n-1}{n+1}$ ii) $(-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}$ iii) $(-1)^{n-1}\frac{n}{2n+1}$ iv) $\frac{n^2}{2n^2-1}$

অনুক্রমের প্রকারভেদ



উল্লেখ্য, অনুক্রমের পদ সংখ্যা সসীম ও অসীম উভয়ই হতে পারে। যে অনুক্রমের পদ সংখ্যা নির্দিষ্ট অর্থাৎ যার শেষ পদ আছে, তাকে **সসীম অনুক্রম** (Finite Sequence) বলে। আর যে অনুক্রমের পদ সংখ্যা অনির্দিষ্ট অর্থাৎ যার শেষ পদ নেই, তাকে **অসীম অনুক্রম** (Infinite Sequence) বলা হয়।

উদাহরণ

সসীম অনুক্রম	অসীম অনুক্রম
i) $1, 4, 9, \ldots, 100$	i) $3, 1, -1, -3, \ldots$
ii) $7, 12, 17, \ldots, 502$	ii) $1, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \ldots$
iii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \ldots, \frac{1}{10001}$	iii) 5 এর গুণিতক $= 5, 10, 15, \ldots$
iv) রবিবার, সোমবার, মঙ্গলবার, ..., শনিবার	iv) গণনাকারী সংখ্যা $= 1, 2, 3, \ldots$

মাথা খাটাও

অনুক্রমের পরের পদগুলো নির্ণয় করো:

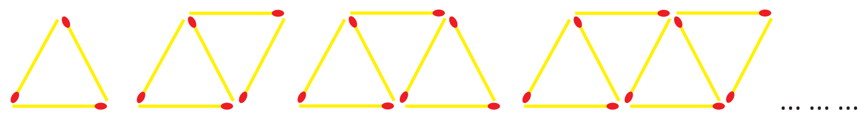
i) $-1, 2, 5, 8,$ ______ , ______, ______. ii) $3.4, 4.5, 5.6,$ ______ , ______, ______.

সমান্তর অনুক্রম (Arithmetic Sequence)

চলো প্রথমে কয়েকটি ঘটনা বিশ্লেষণ করে দেখি:

ঘটনা ১

খাতার উপর ম্যাচের কাঠি বসিয়ে নিচের মতো প্যাটার্ন তৈরি করো:



এবার নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর জানার চেষ্টা করো:

i) প্রতিটি চিত্রের জন্য কয়টি করে কাঠির প্রয়োজন? সংখ্যাগুলো ক্রমানুসারে পাশের ঘরে লেখো:	_______ , _______, _______, ...
ii) পাশাপাশি দুইটি সংখ্যার পার্থক্য নির্ণয় করে পাশের ঘরে লেখো।	
iii) সংখ্যাগুলোর মধ্যে কোনো সাধারণ বৈশিষ্ট্য পেয়েছ কি? পাশের ঘরে তোমার মন্তব্য লেখো।	

ঘটনা - ২

ধরো, পড়াশোনা শেষ করে তুমি একটি চাকুরিতে যোগদান করলে। তোমার প্রারম্ভিক মাসেক বেতন 25,000 টাকা এবং বার্ষিক প্রবৃদ্ধি (Increment) 500 টাকা। তাহলে, ১ম, ২য় এবং ৩য় বছরে তোমার মাসিক বেতন হবে যথাক্রমে 25,000 টাকা, 25,500 টাকা এবং 26,000 টাকা। এখন তুমি যদি পাশাপাশি দুই বছরের মাসিক বেতনের পার্থক্য হিসাব করো, তাহলে দেখবে প্রতি বছর তোমার বেতন 500 টাকা করে বৃদ্ধি পাচ্ছে।

আচ্ছা, এই দুটি ঘটনা বা উদাহরণের মধ্যে কোনো বৈশিষ্ট্য কি লক্ষ করেছ? বৈশিষ্ট্যগুলো নিচের খালি ঘরে লেখো:

একক কাজ

নিচের অনুক্রমগুলো পর্যবেক্ষণ করো। প্রতিটি অনুক্রমের পদগুলোর মধ্যকার বৈশিষ্ট্য লেখো:

ক্রমিক নং	অনুক্রম	বৈশিষ্ট্য
i)	$4, 7, 10, 13, \ldots\ldots\ldots\ldots$	
ii)	$-2, -6, -10, -14, \ldots\ldots\ldots$	
iii)	$\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots\ldots\ldots$	

কাজটি করে নিশ্চয়ই জানতে পারলে, প্রতিটি অনুক্রমের পাশাপাশি দুইটি পদের মধ্যে একটি সাধারণ পার্থক্য আছে, তাই না? প্রথম পদটির সাথে একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা যোগ বা বিয়োগ হয়ে পরবর্তী পদটি তৈরি হয়েছে এবং অনুক্রমটির যে কোনো পদ থেকে পরের পদ তৈরিতে একই বৈশিষ্ট্য বিদ্যমান আছে। যে অনুক্রম এই ধরনের বৈশিষ্ট্য মেনে চলে, তাকে আমরা সমান্তর অনুক্রম (Arithmetic Sequence) বলে থাকি। সমান্তর অনুক্রমের প্রথম পদটিকে a_1 এবং সাধারণ অন্তরকে d দ্বারা প্রকাশ করা হয়। তাহলে, একটি সমান্তর অনুক্রমের বীজগণিতীয় রূপটি আমরা নিচের মতো লিখতে পারি:

সমান্তর অনুক্রমের বীজগণিতীয় রূপ

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, \ldots$$

অনুক্রমটির প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর d কারণ -

২য় পদ – ১ম পদ $= a + d - a = d$

৩য় পদ – ২য় পদ $= a + 2d - (a + d) = a + 2d - a - d = d$

৪র্থ পদ – ৩য় পদ $= a + 3d - (a + 2d) = a + 3d - a - 2d = \mathrm{d}$

এভাবে যে কোনো পদ থেকে তার পূর্বের পদ বিয়োগ করলে d পাওয়া যাবে।

এবার বলো তো অনুক্রমটির সাধারণ পদ কী হবে? পর্যবেক্ষণ করে দেখো সাধারণ পদটি হবে,

$$a_n = a + (n - 1)d$$

দলগত কাজ

নিচের অনুক্রমগুলোর কোনটি সমান্তর ও কোনটি সমান্তর নয় তা দলের সকলে আলোচনা করে বের করো। নিচের ছকটিতে সঠিক উত্তরের জায়গায় টিক ($\surd$) চিহ্ন এবং অন্যথায় ক্রস ($\times$) চিহ্ন দাও। তারপর শ্রেণিতে উপস্থাপন করো।

অনুক্রম	সমান্তর	সমান্তর নয়	সমান্তর হলে সাধারণ অন্তর	যৌক্তিক ব্যাখ্যা
i) $-4, 3, 10, 17, \ldots$				
ii) $1, 4, 9, 16, \ldots$				
iii) $-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \ldots$				
iv) $x-3, x-5, x-7, \ldots$				

সমান্তর অনুক্রমের সাধারণ পদ বা nতম পদ নির্ণয়

নিচের অনুক্রমগুলোর সাধারণ অন্তর ও পরের তিনটি পদ নির্ণয় করো। তোমাদের জন্য একটি নির্ণয় করে দেওয়া হলো:

অনুক্রম	সাধারণ অন্তর	পরের তিনটি পদসহ অনুক্রমটি
i) $4, 14, 24, 34$		$4, 14, 24, 34$, _, _, _
ii) $-4, -2, 0, 2$	$-2-(-4) = 0-(-2) = 2$	$-4, -2, 0, 2$, _, _, _
iii) $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1$		$\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1$, _, _, _

তোমরা তো পরবর্তী তিনটি পদ খুব সহজেই বের করতে পারলে, তাই না? কিন্তু তোমাকে যদি 120তম বা 350তম পদ নির্ণয় করতে বলে, তুমি কি এভাবেই একটি একটি করে নির্ণয় করবে? ভেবে দেখো তো, কাজটি সহজ হবে কিনা?

তাহলে চলো, অনুসন্ধান করে দেখি কোনো অনুক্রমের সাধারণ পদ বা n-তম পদ নির্ণয় করা যায় কি না।

একটি উদাহরণ দেওয়া যাক।

$3, 8, 13, 18, \ldots\ldots\ldots$

নিশ্চয়ই এটি একটি সমান্তর অনুক্রম, তাই না?

এবার অনুক্রমের পদগুলোর মধ্যে কোন ধরনের বৈশিষ্ট্য আছে, চলো একটি একটি করে বিশ্লেষণ করি ও

তা থেকে কোনো সাধারণ সূত্র পাওয়া যায় কি না তালিকা করে অনুসন্ধান করি:

পদ	দেওয়া আছে	প্যাটার্ন	আমরা লিখতে পারি	সাধারণ পদ বা $\boldsymbol{n}$-তম পদ
1	3	3	3 + 5 (0)	$\boldsymbol{a_n = 3 + (n-1)\ 5}$ n-তম পদ ১ম পদ a_1 সাধারণ অন্তর, d $\boldsymbol{n}$-তম পদ $\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)d}$
2	8	3+5	3 + 5 (1)	
3	13	3+5+5	3 + 5 (2)	
4	18	3+5+5+5	3 + 5 (3)	
...	...	...	...	
$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{a_n}$	3+5+5+5+5+ ⋯ +5	3 + 5 $(\boldsymbol{n}-1)$	

উদাহরণ-৭: 7, 11, 15, 19,... অনুক্রমের nতম পদ নির্ণয় করো এবং nতম পদের সূত্র থেকে 15তম, 120তম পদ নির্ণয় করো।

সমাধান: প্রদত্ত 7, 11, 15, 19,... অনুক্রমটি একটি সমান্তর অনুক্রম। কারণ-

২য় পদ – ১ম পদ = 11 – 7 = 4,

৩য় পদ – ২য় পদ = 15 – 11 = 4

অর্থাৎ অনুক্রমটির সাধারণ অন্তর = 4

এবার আমরা জানি, nতম পদ

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

যেখানে, প্রথম পদ = $a_1 = 7$, পদ সংখ্যা = n এবং সাধারণ অন্তর = $d = 4$

$\therefore$ nতম পদ $a_n = 7 + (n-1)4 = 7 + 4n - 4 = 4n + 3$

$\therefore$ 15তম পদ $a_{15} = 4 \times 15 + 3 = 63$

এবং 120তম পদ $a_{120} = 4 \times 120 + 3 = 483$

মাথা খাটাও

$7x + 2,\ 5x + 12,\ 2x - 1$ একটি সমান্তর অনুক্রম হলে, x এর মান নির্ণয় করো।

একক কাজ

ক) নিচের সমান্তর অনুক্রমের সাধারণ পদ নির্ণয় করো।

i) 5, 12, 19, 26,… ii) 1, 0.5, 0, –0.5,… iii) যার ৭তম পদ –1 এবং ১৬তম পদ 17

খ) নিচের সমান্তর অনুক্রমের ফাঁকা পদগুলো নির্ণয় করো।

i) 6,______,______,______, 54 . ii) ______, –3, 2, ______,______, 17.

দলগত কাজ

নিচের ৫টি বক্স-এর প্রতিটি থেকে একটি করে সংখ্যা নিয়ে সমান্তর অনুক্রম তৈরি করো। সহপাঠীদের সাথে তোমার তৈরি অনুক্রমগুলো মিলিয়ে দেখো :

2, 0, 5, 3, -12	-9, 24, 6, 20, -20	4, 15, 31, -6, -8	-3, 8, 10, -4, 17	-16, 10, -12, 10, 25

গুণোত্তর অনুক্রম (Geometric Sequence)

গুণোত্তর অনুক্রম আলোচনার শুরুতেই দুএকটি ঘটনার আলোকপাত করা যাক।

ঘটনা - ১

লিলি তার মায়ের জন্য একটি উপহার কিনতে চায়। উপহারটি কিনতে তার কমপক্ষে 300 টাকা লাগবে। লিলি পরিকল্পনা করে, সে নভেম্বরের প্রথম সপ্তাহ থেকে কিছু টাকা সঞ্চয় করতে থাকবে। প্রথম সপ্তাহে যত টাকা সঞ্চয় করবে পরের সপ্তাহে করবে তার দ্বিগুণ। পরিকল্পনা অনুযায়ী লিলি 5 টাকা দিয়ে সঞ্চয় শুরু করল। কত সপ্তাহ শেষে লিলি উপহারটি কিনতে পারবে?

এবার চলো হিসেবটি করে দেখি:

সপ্তাহ	১	২	৩	৪	৫	৬	মোট সঞ্চয়
সঞ্চয় (টাকা)	5	5×2	10×2	20×2	40×2	80×2	315
	5	10	20	40	80	160	

যেহেতু লিলির মোট 315 টাকা সঞ্চয় হবে, সেহেতু সে ছয় সপ্তাহ শেষে তার মায়ের জন্য উপহারটি কিনতে পারবে।

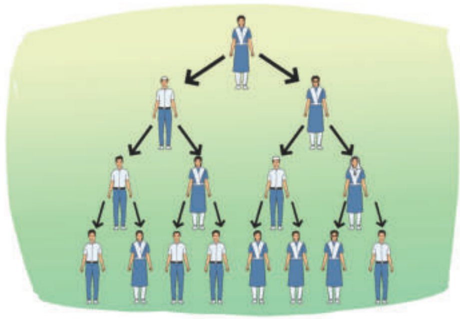
তোমরা নিশ্চয়ই লক্ষ করেছ, লিলির সঞ্চয় পরিকল্পনায় একটি বিশেষ বৈশিষ্ট্য আছে, তাই না? চলো আরও

একটু পর্যালোচনা করে দেখি। লক্ষ করো, এই সপ্তাহের সাপেক্ষে সঞ্চয়ের অনুক্রমের যে কোনো সংখ্যাকে তার আগের সংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল একই (2) হয়। নিচে হিসাবটি করে দেখানো হলো।

$$\frac{10}{5}=2, \quad \frac{20}{10}=2, \quad \frac{40}{20}=2, \quad \frac{80}{40}=2, \quad \frac{160}{80}=2$$

ঘটনা ২: ভাইরাসের বিস্তার

আমরা অনেক সময় ভাইরাসজনিত বিভিন্ন রোগে আক্রান্ত হয়ে থাকি। ধরো, কোনো এক ভাইরাসজনিত রোগ এমনভাবে ছড়ায় যে প্রথমে একজন আক্রান্ত হয়, তারপর পাশের ছবির মতো ছড়াতে থাকে। ছবি দেখে রোগটি ছড়ানোর যে ক্রমটি পাওয়া গেল, তা হলো: $1, 2, 4, 8, \ldots$ যেখানে প্রথম পদটি ছাড়া প্রতিটি পদই তার পূর্বের পদের দ্বিগুণ।



উভয় ঘটনা বিশ্লেষণ করে আমরা কী পেলাম?

উভয় ক্ষেত্রেই প্রতিটি পদ তার পূর্ববর্তী পদের দ্বিগুণ। অন্যভাবে যে কোনো পদ ও তার পূববর্তী পদের অনুপাত নির্দিষ্ট একটি সংখ্যা। অর্থাৎ যে কোনো পদ ও তার পূববর্তী পদের অনুপাত সাধারণ। আর এই ধরনের অনুক্রমই হলো **গুণোত্তর অনুক্রম** (Geometric Sequence).

উদাহরণ: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ একটি গুণোত্তর অনুক্রম, কারণ এখানে যে কোনো পদ ও তার পূর্ববর্তী পদের অনুপাত $\frac{1}{2}$।

একক কাজ

দুইটি গুণোত্তর অনুক্রম নিচের বক্সে লেখো যেখানে একটির সাধারণ অনুপাত $\frac{1}{3}$ এবং অন্যটির সাধারণ অনুপাত তোমার নিজের মতো পছন্দ করো।

গুণোত্তর অনুক্রমের প্রথম পদটিকে a এবং সাধারণ অনুপাতকে r দ্বারা প্রকাশ করা হয়। তাহলে, একটি গুণোত্তর অনুক্রমের বীজগণিতীয় রূপটি আমরা নিচের মতো লিখতে পারি:

গুণোত্তর অনুক্রমের বীজগণিতীয় রূপ

$$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$$

অনুক্রমটির প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r কারণ-

২য় পদ ÷ ১ম পদ $= ar \div a = r$

৩য় পদ ÷ ২য় পদ $= ar^2 \div ar = r$

৪র্থ পদ ÷ ৩য় পদ $= ar^3 \div ar^2 = r$

তোমরা কি বলতে পারবে অনুক্রমটির nতম পদ কত? পর্যবেক্ষণ করে দেখো, nতম পদ

$$a_n = ar^{n-1}$$

একক কাজ

- দুইটি সসীম ও দুইটি অসীম গুণোত্তর অনুক্রমের উদাহরণ দাও।
- a, b, c গুণোত্তর অনুক্রমভুক্ত হলে, নিচের ফাঁকা ঘরগুলো পূরণ করো:

$$\frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

গুণোত্তর অনুক্রমের সাধারণ পদ বা nতম পদ নির্ণয়

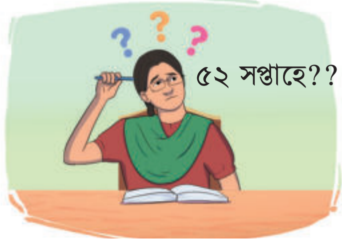
নিচের অনুক্রমগুলোর সাধারণ অনুপাত ও পরের তিনটি পদ নির্ণয় করো। তোমাদের জন্য একটি নির্ণয় করে দেওয়া হলো:

অনুক্রম	সাধারণ অনুপাত	পরের তিনটি পদসহ অনুক্রমটি
i) 6, 18, 54,…	$18 \div 6 = 54 \div 18 = 3$	6, 18, 54, <u>162, 486, 1458</u>, ...
ii) $3x, 9x^2, 81x^3, \ldots$		$3x, 9x^2, 81x^3$, —, —, —, ...
iii) 625, 25, 5,…		625, 25, 5, —, —, —, ...
তোমরা তো পরবর্তী তিনটি পদ খুব সহজেই বের করতে পারলে, তাই না? কিন্তু তোমাকে যদি 50তম বা 100তম পদ নির্ণয় করতে বলে, তুমি কি এভাবেই একটি একটি করে নির্ণয় করবে? ভেবে দেখো তো, কাজটি সহজ হবে কি না?		

জোড়ায় কাজ

সমান্তর অনুক্রমের মতো এক্ষেত্রেও একটি উদাহরণ নিয়ে প্রতিটি পদ বিশ্লেষণ করো। অনুসন্ধান করে দেখো পদগুলোর মধ্যে কোনো সাধারণ বৈশিষ্ট্য পাওয়া যায় কি না।

লিলির সাপ্তাহিক সঞ্চয়ের অনুক্রম



লিলির প্রতি সপ্তাহে সঞ্চয়ের অনুক্রমটি বিবেচনা করো। অনুক্রমটি নিম্নরূপ

$$5, 10, 20, 40, \ldots$$

তাহলে, লিলি এক বছরে বা 52 সপ্তাহে তাকে কত টাকা সঞ্চয় করবে?

পদ	দেওয়া আছে	প্যাটার্ন	আমরা লিখতে পারি	সাধারণ পদ বা ***n***-তম পদ
1	5	5	5×2^0	$a_n = 5 \times 2^{n-1}$ n-তম পদ; ১ম পদ a_1; সাধারণ অনুপাত, d ***n*তম পদ** $a_n = a_1 r^{n-1}$
2	10	5×2	5×2^1	
3	20	$5 \times 2 \times 2$	5×2^2	
4	40	$5 \times 2 \times 2 \times 2$	5×2^3	
...	...	...	...	
n	a_n	$5 \times 2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 2$	$5 \times 2^{n-1}$	

এবার ভেবে দেখো তো, লিলির যদি গুণোত্তর অনুক্রমের সাধারণ পদ বা nতম পদ নির্ণয়ের এই সহজ ধারণাটি জানা থাকত, তাহলে 52তম সপ্তাহে সে কত টাকা সঞ্চয় করেছে তা বের করা কি কঠিন বা অনেক বেশি সময় লাগতো?

হিসাবটি ঝটপট করে সিদ্ধান্ত গ্রহণ করো:

উদাহরণ

ধরো, তুমি একটি কাজ পেলে, যা পড়াশোনার পাশাপাশি করা সম্ভব। কাজটি করে তুমি প্রথম মাসে আয় করেছ 4000 টাকা। পরবর্তী প্রতিমাসে পূর্ববর্তী মাসের 5% করে আয় বৃদ্ধি পাবে। 10তম মাসে তোমার আয় কত টাকা হবে?

সমাধান: চলো সমস্যাটি একটি তালিকা করে বিশ্লেষণ করি:

মাস	প্রথম	দ্বিতীয়	তৃতীয়	...	10তম
আয় (টাকা)	4000	4200	4410	...	?

প্রথমেই আমাদের খুঁজে দেখতে হবে, প্রাপ্ত অনুক্রমটি সমান্তর নাকি গুণোত্তর। অনুসন্ধানটি তুমি নিজেই করো:

অনুক্রমটির ১ম পদ $a_1 = 4000$, সাধারণ অনুপাত $r = 1.05$ এবং পদসংখ্যা $n = 10$

তুমি ইতোমধ্যেই জেনেছ, গুণোত্তর ধারার সাধারণ পদ বা nতম পদ নির্ণয়ের সূত্র $= a_1 r^{n-1}$

$\therefore$ ১০তম মাসে তোমার আয় হবে $= 4000\ (1.05)^{10-1} = 4000\ (1.05)^9 = 6205.31$ টাকা (প্রায়)।

মাথা খাটাও

$x + 6, x + 12, x + 15$ একটি গুণোত্তর অনুক্রম হলে, x এর মান নির্ণয় করো।

নির্দেশনা

a, b, c গুণোত্তর অনুক্রমভুক্ত হলে, $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$ বা $b^2 = ac$ হবে, যা তুমি ইতোমধ্যেই জেনেছ।

একক কাজ

ক) নিচের গুণোত্তর অনুক্রমের সাধারণ পদ নির্ণয় করো।

i) $3, 15, 75, \ldots$ ii) $4, \frac{4}{5}, \frac{4}{25}, \ldots$ iii) যার 7তম পদ 8 এবং 13তম পদ 512

খ) নিচের গুণোত্তর অনুক্রমের ফাঁকা পদগুলো নির্ণয় করো।

i) $3, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, \frac{1}{27}$ ii) $\_\_\_, \frac{1}{8}, \_\_\_, \_\_\_, \frac{1}{64}$

গ) i) $4, 12, 36, \ldots$ অনুক্রমের কততম পদ 2916?

ii) একটি গুণোত্তর অনুক্রমের $a_4 = \frac{8}{9}$ এবং $a_7 = \frac{64}{243}$ হলে, $a_{10} =$ কত?

ফিবোনাচ্চি ক্রম (Fibonacci Sequence)

ফিবোনাচ্চি অনুক্রম সমান্তর ও গুণোত্তর অনুক্রম থেকে ভিন্নতর। নিচের অনুক্রমগুলো লক্ষ করো। প্রতিটির ক্ষেত্রেই তুমি কি তার পরের পদটি নির্ণয় করতে পারবে? যেগুলো পারবে যুক্তিসহ নিচের ছকে লেখো:

অনুক্রম	পরবর্তী পদ	যুক্তি
(i) 3, 5, 7, 9, 11,...		
(ii) 3, 6, 12, 24, 48,...		
(iii) 3, 5, 8, 13, 21,...		

(i) ও (ii) নং অনুক্রমের পরের পদটি খুব সহজেই নির্ণয় করতে পেরেছ, তাই না? কারণ এদের পাশাপাশি দুইটি পদের বৈশিষ্ট্য সম্পর্কে তোমার ধারণা আছে। কিন্তু (iii) নং অনুক্রমটির পরবর্তী পদ কোনোভাবেই বের করা যাচ্ছে না। আর অনুক্রমটির পদগুলোতে একই বৈশিষ্ট্যের পুনরাবৃত্তিও ঘটছে না। যেহেতু (iii) নং সমস্যাটিকে অনুক্রম বলা হয়েছে, সেহেতু নিশ্চয়ই এর পদগুলোর মধ্যে কোনো না কোনো একই বৈশিষ্ট্যের পুনরাবৃত্তি থাকবেই। এটি একটি বিশেষ ধরনের অনুক্রম।

এই বিশেষ ধরনের অনুক্রমের পদগুলোর মধ্যকার সম্পর্কের সৌন্দর্য আবিষ্কার করেছিলেন একজন বিখ্যাত গণিতবিদ। তিনি ইতালীর বিখ্যাত গণিতবিদ Leonardo Pisano, যার ডাকনাম ফিবোনাচ্চি (Fibonacci)। প্রকৃতির মাঝে অনুসন্ধান করে তিনি সংখ্যারাশির এই বিশেষ ধরনের অনুক্রম খুজে পান, যা তিনি "Liber Abaci" নামক গ্রন্থে প্রকাশ করেন। ফিবোনাচ্চি অনুক্রমে প্রথম সংখ্যা দুইটি যথাক্রমে 0 এবং 1 এবং এর পরবর্তী যে কোনো পদ পূর্ববর্তী দুটি পদের সমষ্টির সমান। অর্থাৎ তৃতীয় পদ $= 0 + 1 = 1$, চতুর্থ পদ $= 1 + 1 = 2$. সুতরাং ফিবোনাচ্চি অনুক্রমটি নিম্নরূপ:

Leonardo Pisano (Fibonacci)

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

ফিবোনাচ্চি অনুক্রমের পদগুলোকে আমরা নিম্নোক্ত সূত্র থেকে বের করতে পারি,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \,;\, n \in N$$

যেখানে, $F_0 = 0, F_1 = F_2 = 1$

ফিবোনাচ্চি অনুক্রম তৈরির খেলা — **সময়: 5 মিনিট**

নির্ধারিত সময়ের মধ্যে সঠিক ফিবোনাচ্চি অনুক্রম তৈরি করতে হবে। ক্লাশের মধ্যে যে বেশি সংখ্যক ফিবোনাচ্চি অনুক্রমের পদ সঠিকভাবে গঠন করতে পারবে, সে জয়লাভ করবে।

প্রকৃতিতে ফিবোনাচ্চি ক্রম

ফিবোনাচ্চি একজন প্রকৃতিপ্রেমী গণিতবিদ ছিলেন। প্রকৃতির বিভিন্ন সৃষ্টি রহস্য নিয়ে তিনি গবেষণা করতেন। তিনি গবেষণা করতে গিয়ে দেখলেন যে, প্রকৃতিতে কিছু জিনিস আছে যা একটি নিয়মিত সজ্জা অনুসরণ করেছে। নিচের ছবিগুলো পর্যবেক্ষণ করো।

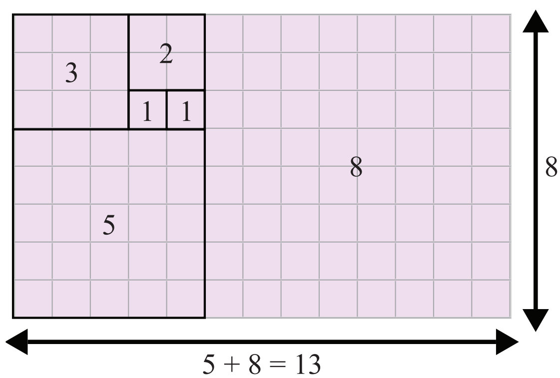
লক্ষ করো যে, প্রতিটি ফুলের পাপড়ির সংখ্যা ফিবোনাচ্চি অনুক্রম মেনে চলে।

একক/দলগত কাজ

তোমাদের স্কুলের বাগান বা বাড়ির আশপাশের ঐসকল উদ্ভিদ পর্যবেক্ষণ করে একটি রিপোর্ট তৈরি করো যাদের শাখা-প্রশাখা, পাতার সংখ্যা বা ফুলের পাপড়ির সংখ্যা ফিবোনাচ্চি অনুক্রমের অনুরূপ।

ফিবোনাচ্চি আয়তক্ষেত্র

পাশের ছবিটি লক্ষ করো। এটি একটি আয়তক্ষেত্র। এর ক্ষুদ্রতম বর্গগুলোর বাহুর দৈর্ঘ্য 1 একক হলে, আয়তটির ক্ষেত্রফল ছবির ছোটো ছোটো বর্গগুলো গণনা করেই নির্ণয় করা সম্ভব। তাই না? তাহলে ঝটপট বলে ফেলো আয়তটির ক্ষেত্রফল = $\boxed{}$ বর্গ একক।



আয়তটির ক্ষেত্রফল ভিন্নভাবেও নির্ণয় করা সম্ভব।

ছবিতে আয়তটির দৈর্ঘ্য = 13 একক এবং প্রস্থ = 8 একক।

সুতরাং ক্ষেত্রফল $= (13 \times 8) = 104$ বর্গ একক।

এত গেল, আয়তক্ষেত্রটির জ্যামিতিক হিসাবনিকাশ। কিন্তু তোমরা যদি গভীরভাবে লক্ষ করো, আয়তটির ভিতরে কয়েকটি সংখ্যা দেখতে পাবে। সংখ্যাগুলো ছোটো থেকে ক্রমানুসারে সাজালে একটি অনুক্রম তৈরি হবে। অনুক্রমটি নিশ্চয়ই চিনতে পারছ, তাই না? এখন আমরা যদি প্রতি ক্ষেত্রে ফিবোনাচ্চি ক্রমের পদ অনুসারে একটির পিঠে একটি করে বর্গ আঁকি এবং এভাবে আঁকতে আঁকতে যেখানেই থামি না কেনো সব সময় দেখব একটি আয়তক্ষেত্র তৈরি হবে। যাকে আমরা ফিবোনাচ্চি আয়তক্ষেত্র বলতে পারি। আবার আয়তক্ষেত্রটির ভিতরে বিভিন্ন আকৃতির যে বর্গগুলো তৈরি হবে, তাদের ক্ষেত্রফলের সমষ্টিই হবে আয়তটির ক্ষেত্রফল। চলো যাচাই করে দেখি:

$\therefore$ আয়তটির ক্ষেত্রফল $= 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 = 104 = (13 \times 8)$ বর্গ একক।

একক কাজ

ছক কাগজে অথবা গ্রিডে 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 সংখ্যাগুলো ব্যবহার করে ফিবোনাচ্চি আয়তক্ষেত্র অঙ্কন করো।

ধারা (Series)

তোমরা ইতোমধ্যেই অনুক্রম সম্পর্কে জেনেছ। আর অনুক্রমের পদগুলো পরপর যোগ আকারে লিখলে **ধারা** (Series) পাওয়া যায়। যেমন:

উদাহরণ-১: ধ্রুব সংখ্যার ধারা: $3 + 3 + 3 + 3 + \cdots$

উদাহরণ-১. স্বাভাবিক সংখ্যার ধারা: $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots$

ধারার সাধারণ আকার

কোনো অনুক্রমের প্রথম পদ a_1, দ্বিতীয় পদ a_2, তৃতীয় পদ a_3, ... , এবং n-তম পদ a_n হলে, অনুক্রমটি লিখতে পারি, $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$. এই অনুক্রমের পদগুলো যোগ আকারে লিখলে, অর্থাৎ

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

আকারে লিখলে অনুক্রমটি ধারায় রূপান্তরিত হয়ে গেল। একে ধারার **সাধারণ আকার** (general form of series) বলে।

সসীম ও অসীম ধারা

ধারার পদ সংখ্যা নির্দিষ্ট হলে তাকে **সসীম ধারা** (Finite Series) এবং পদ সংখ্যা অনির্দিষ্ট বা অসীম হলে, তাকে **অসীম ধারা** (Infinite Series) বলা হয়। যেমন:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 61$$ একটি সসীম ধারা

এবং

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots$$ একটি অসীম ধারা।

একক কাজ

দুইটি সসীম ও দুইটি অসীম ধারার উদাহরণ দাও।

দুইটি গুরুত্বপূর্ণ ধারা

অনুক্রমের মতো ধারার ক্ষেত্রেও পরপর দুইটি পদের মধ্যে সম্পর্কের উপর নির্ভর করে দুই ধরনের ধারা পাওয়া যায়। যেমন:

(i) $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots$

এবং

(ii) $2 + 4 + 8 + 16 + \cdots$

দুইটি ধারা। প্রথমটির পরপর দুইটি পদের পার্থক্য সমান। আবার দ্বিতীয়টির পরপর দুইটি পদের অনুপাত সমান। তাই অনুক্রমের মতো ধারাগুলোর মধ্যে গুরুত্বপূর্ণ দুইটি ধারা হলো সমান্তর ধারা ও গুণোত্তর ধারা ।

সমান্তর ধারা (Arithmetic Series)

যে ধারার পদগুলো সমান্তর অনুক্রম মেনে চলে, তাকে সমান্তর ধারা (Arithmatic Series) বলে। তোমরা জেনেছ, সমান্তর অনুক্রমের পরপর দুইটি পদের পার্থক্য সমান। সমান্তর ধারার ক্ষেত্রেও ঠিক তাই। কোনো সমান্তর ধারার প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর d হলে, ধারাটি হবে-

$$a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + \ldots\ldots + \{a_1 + (n - 1)d\} + \cdots$$

যেখানে ধারাটির n-তম পদ

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \quad [\, a = a_1 \text{ বিবেচনাকরে}]$$

একক কাজ

ক) নিচের সমান্তর ধারার সাধারণ পদ বা n-তম পদ নির্ণয় করো।

i) $6 + 13 + 20 + \cdots$ ii) $2 - 5 - 12 - \ldots$

খ) নিচের সমান্তর ধারার ফাঁকা পদগুলো নির্ণয় করো।

i) $8 - 8 - 24 - \_ - \_ - \_$

ii) $\_ -3 + 2 + \_ + \_ + 17.$

মাথা খাটাও

k এর কোন মানের জন্য $(5k - 3) + (k + 2) + (3k - 11)$ একটি সমান্তর ধারা হবে? ধারাটির সাধারণ অন্তর ও সাধারণ পদ নির্ণয় করো।

সমান্তর ধারার সমষ্টি

তুমিতো জানো, ভৌগোলিক অবস্থানের কারণে বাংলাদেশ প্রায় সময়ই ঘূর্ণিঝড় আক্রান্ত হয়ে থাকে। আর ঘূর্ণিঝড় হলে, সবচেয়ে বেশি ক্ষতিগ্রস্থ হয় আমাদের গাছপালা। বাড়িঘর, রাস্তঘাট, বনভূমির শত শত গাছপালা উপড়ে যায়। তুমি এও জানো যে, এই সবুজ গাছপালা আমাদের কতই-না উপকার করে থাকে। তাই আমাদের রক্ষার্থে আমাদের সবাইকে বৃক্ষ রোপণ করতে হবে। এক্ষেত্রে তোমরা তোমাদের শ্রেণি শিক্ষকের মাধ্যমে প্রতিষ্ঠান প্রধানের সঙ্গে কথা বলে তোমাদের এলাকায় বৃক্ষ রোপণের জন্য পাঁচ বছর মেয়াদি একটি পরিকল্পনা গ্রহণ করতে পার। পরিকল্পনাটি এমন হতে পারে, প্রথম মাসে তোমরা 10টি ফলজ গাছের চারা রোপণ করলে। এরপর পরবর্তী প্রতি মাসে আগের মাসের চেয়ে 5টি করে বেশি রোপণ করবে। একবার কল্পনা করে দেখো তো পাঁচ বছরে তোমরা কতগুলো গাছ রোপণ করতে পারবে?

চলো, প্রথম বছরের (12 মাসের) হিসাবটি করে দেখি। নিচের ছকে কয়েকটি উপাত্ত দেয়া আছে, বাকিগুলো তোমরা পূরণ করো।

মাসের সংখ্যা	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	মোট
গাছের সংখ্যা	10	15	20									65	??

তোমরা হয়তো বুঝতে পারছ, হিসেবটিকে ধারায় রূপান্তর করলে এটি একটি সমান্তর ধারা হবে। সমান্তর ধারাটি নিম্নরূপ:

$$10 + 15 + 20 + \cdots + 65$$

নির্দেশনা

সমান্তর ধারার সাধারণ পদ বা nতম পদ

$$a_n = a + (n - 1)d$$

ভেবে দেখো, যে কোনো মাসের প্রয়োজনীয় চারার সংখ্যা হয়তো ধারাটির সাধারণ পদ নির্ণয়ের সূত্র ব্যবহার করে বের করা যাবে। কিন্তু এক বছরে মোট কতগুলো গাছ তোমরা নিজের হাতে রোপণ করতে পারবে, তা বের করা কি সহজ হবে? এসো আমরা কীভাবে মোট সংখ্যাটি নির্ণয় করতে পারি, সে বিষয়ে আলোচনা করি।

সর্বপ্রথম ধারার সমষ্টি নির্ণয়ের ভিত্তি রচনা করেন অন্যতম শ্রেষ্ঠ একজন গণিতবিদ কার্ল ফ্রেডরিখ গাউস (Carl Friedrich Gauss). আমরা এখানে ধারার সমষ্টি নির্ণয়ের জন্য কার্ল গাউসের পদ্ধতি আলোচনা করব।

Carl Friedrich Gauss

প্রথম nসংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি কার্ল গাউস কীভাবে বের করেছেন তা পর্যবেক্ষণ করি।

ধরি, প্রথম nসংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ধারা

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

ধারাটি বিপরীতক্রমে লিখতে পারি, $\quad S_n = n + (n - 1) + (n - 2) + \cdots + 1$

ধারা দুইটি যোগ করে পাই, $2S_n = \underbrace{(n + 1) + (n + 1) + (n + 1) + \cdots + (n + 1)}_{n \text{ সংখ্যক}} = n(n + 1)$

$$\therefore S_n = \frac{n\,(n + 1}{2}$$

এটি প্রথম nসংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টির গাউসের সূত্র।

একক কাজ

গাউসের সূত্র ব্যবহার করে প্রথম 50টি স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি নির্ণয় করো।

এবার চলো আমরা চারা রোপণের সমস্যাটিতে ফিরে যাই। এক বছরে রোপণ করা চারার সংখ্যার সমষ্টির ধারাটি ছিল,

$$S = 10 + 15 + 20 + \cdots + 65$$

ধারাটি বিপরীতক্রমে লিখলে পাই, $S = 65 + 60 + 55 + \cdots + 10$

ধারা দুইটি যোগ করে পাই, $2S = \underbrace{75 + 75 + 75 + \cdots + 75}_{12 \text{ সংখ্যক}} = 12 \times 75$

$$\therefore \; S = \frac{12 \times 75}{2} = 6 \times 75 = 450$$

অর্থাৎ এক বছরে 450টি গাছের চারা রোপণ করতে পারবে।

সমান্তর ধারার সমষ্টি নির্ণয়ের সূত্র

ধরি, কোনো একটি সমান্তর ধারার প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর d. তাহলে n-তম পদ $a_n = a + (n - 1)d$

ধরি, প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি S_n. তাহলে

$$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + (a + (n - 1)d)$$

ধারাটিকে বিপরীতক্রমে লিখলে পাই,

$$S_n = (a + (n - 1)d) + (a + (n - 2)d) + (a + (n - 3)d) + \cdots + a$$

ধারা দুইটিকে যোগ করে পাই,

$$2S_n = \underbrace{\{2a + (n - 1)d\} + \{2a + (n - 1)d\} + \cdots + \{2a + (n - 1)d\}}_{n \text{ সংখ্যক}}$$

$$= n\{2a + (n - 1)d\}$$

$$\therefore S_n = \frac{1}{2} n\{2a + (n - 1)d\}$$

এটিই সমান্তর ধারার n-সংখ্যক পদের সমষ্টির সূত্র।

এবার পাঁচ বছরে তোমরা মোট কতগুলো গাছ রোপণ করতে পারবে সেই হিসাবটি নিচের খালি বক্সে করো :

জোড়ায় কাজ

১. ধরো, তুমি একটি চাকুরি পেয়েছ। তুমি তোমার বেতন থেকে প্রথম মাসে 1200 টাকা সঞ্চয় করলে এবং পরবর্তী প্রতিমাসে এর পূর্ববর্তী মাসের তুলনায় 100 টাকা বেশি সঞ্চয় করতে থাকবে।

ক) তুমি 20তম মাসে কত টাকা সঞ্চয় করবে?

খ) প্রথম 20 মাসে মোট কত টাকা সঞ্চয় করবে?

গ) কত বছরে তুমি মোট 106200 টাকা সঞ্চয় করতে পারবে?

২. একটি সমান্তর ধারার $a_8 = 60$ এবং $a_{12} = 48$ হলে, a_{40} এবং S_{40} নির্ণয় করো।

৩. কোনো সমান্তর ধারার ১ম ও শেষ পদ যথাক্রমে 3 এবং −53। যদি ধারাটির সমষ্টি −375 হয় তবে, ধারাটিতে কয়টি পদ ছিল?

গুণোত্তর ধারা

তোমাদের নিশ্চয় মনে আছে যে লিলি টাকা সঞ্চয় করে তার মায়ের জন্য একটি উপহার কিনেছিল। লিলির মতো অপুও প্রতি সপ্তাহে টাকা সঞ্চয় করে। তার একটি মাটির ব্যাংক আছে যেখানে সে প্রথম সপ্তাহে 2 টাকা রাখে, দ্বিতীয় সপ্তাহে 4 টাকা, তৃতীয় সপ্তাহে 8 টাকা এবং এভাবে প্রতি সপ্তাহে পূর্বের সপ্তাহের দ্বিগুণ টাকা ওই মাটির ব্যাংকে রাখে। তিন মাস পর অপু ব্যাংকটি হাতে নিয়ে খুবই খুশি হয়। কারণ এর ওজন আগের চেয়ে বেড়ে গেছে এবং কানের কাছে নিয়ে ঝাঁকুনি দেওয়ায় ভিতরে টাকা পয়সা নড়াচড়ার বেশ শব্দ পাওয়া যাচ্ছে। অপুর ইচ্ছে হলো একটু হিসাব-নিকাশ করে দেখে, ভিতরে কত টাকা থাকতে পারে। তাই সে ঝটপট কাগজ কলম নিয়ে বসে গেল।

অপু লিলির মতো প্রথমে নিচের একটি তালিকা তৈরি করে:

তিন মাস হলো এক বছরের $\frac{1}{4}$ অংশ। সুতরাং 3 মাস $= \left(52 \times \frac{1}{4}\right) = 13$ সপ্তাহ।

13 সপ্তাহের সারণিটি নিচে দেয়া হলো। খালি ঘরগুলো পূরণ করো।

সপ্তাহের সংখ্যা	1	2	3	4	…	11	12	13	মোট
টাকার পরিমাণ	2	4	8					8192	??

গুণোত্তর অনুক্রম ও এর বৈশিষ্ট্য সম্পর্কে অপু ইতোমধ্যেই জেনে গেছে। তাই সে প্রতি সপ্তাহের জমানো টাকাকে একেকটি পদ বিবেচনা করে প্রথমে একটি ধারা তৈরি করে। ধারাটি হলো:

$$2 + 4 + 8 + 16 + \ldots + 8192$$

ধারাটির প্রথম পদ $a = 2$, সাধারণ অনুপাত $r = \frac{4}{2} = 2$.

অপু ধারাটিকে নিচের মতো করে বিশ্লেষণ করে:

পদ (সপ্তাহ)	টাকার পরিমাণ	প্যাটার্ন	বীজগণিতীয় রূপ	
1	2	$2 \times 1 = 2 \times 2^0 = 2 \times 2^{1-1}$	ar^{1-1}	a
2	4	$2 \times 2 = 2 \times 2^1 = 2 \times 2^{2-1}$	ar^{2-1}	ar
3	8	$2 \times 2 \times 2 = 2 \times 2^2 = 2 \times 2^{3-1}$	ar^{3-1}	ar^2
4	16	$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2 \times 2^3 = 2 \times 2^{4-1}$	ar^{4-1}	ar^3
…	…	…	…	…
n		$\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 2}_{n \text{ সংখ্যক}} = 2 \times 2^{n-1}$	ar^{n-1}	ar^{n-1}

তাহলে, সসীম গুণোত্তর ধারাটি হবে, $a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1}$

একক কাজ

ক) গুণোত্তর ধারা নির্ণয় করো: i) $a = 4, r = 10$ ii) $a = 9, r = \frac{1}{3}$ iii) $a = \frac{1}{\sqrt{2}}, r = -\sqrt{2}$

খ) অপু ১২তম সপ্তাহে কত টাকা ব্যাংকে রেখেছিল?

গুণোত্তর ধারার প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয়

মাটির ব্যাংকটিতে তিন মাসে মোট কত টাকা জমা হয়েছে ব্যাংকটি না ভেঙে অপু তা জানার পরিকল্পনা করে। তার মাথায় দুটি ভাবনা উঁকি দেয়। প্রথমটি হলো– তিন মাসে অর্থাৎ মোট 13 সপ্তাহে যত টাকা জমা হয়েছে তা প্রতি সপ্তাহের টাকা হিসাব করে নির্ণয় করে যোগ করা। কিন্তু এটি অনেক সময় সাপেক্ষ্য ব্যাপার। আর দ্বিতীয়টি হলো– এমন কোনো ব্যবস্থা অনুসন্ধান করা যার মাধ্যমে সরাসরি মোট টাকা জানা যাবে। অপুর অনুসন্ধানী মন দ্বিতীয়টিতেই স্থির হয়।

গুণোত্তর ধারাটির ১ম পদ a, সাধারণ অনুপাত r [যেখানে $r \neq 1$] এবং প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি S_n হলে, আমরা লিখতে পারি,

$$s_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

উভয় পক্ষকে r দ্বারা গুণ করে, $rs_n = \quad ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} + ar^n \quad \ldots\ldots(2)$

এখন (1) নং থেকে (2) বিয়োগ করে পাই,

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

$$\text{বা, } S_n(1 - r) = a(1 - r^n)$$

$$\therefore S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

এটিই গুণোত্তর ধারার সমষ্টির সূত্র।

তোমাদের মনে আছেতো, অপু 13 সপ্তাহে টাকা সঞ্চয় করে কোন ধারাটি পেয়েছিল? হ্যাঁ, ধারাটি ছিল:

$$2 + 4 + 8 + 16 + \ldots + 8192$$

ধারাটির ১ম পদ $a = 2$, সাধারণ অনুপাত $r = 2$ এবং পদ সংখ্যা $n = 13$। সূত্রটিতে মানগুলো বসিয়ে অপুর তিন মাসের সঞ্চিত মোট টাকার পরিমাণ বের করো।

একক কাজ

ক) $1 - 3 + 9 - 27 + \cdots$ প্রথম 7 টি পদের সমষ্টি নির্ণয় করো।

খ) $54 + 18 + 6 + \cdots + \frac{2}{81}$ ধারাটির সমষ্টি নির্ণয় করো।

অসীম গুণোত্তর ধারার সমষ্টি

কোনো গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ a, সাধারণ অনুপাত $r \neq 1$ হলে, ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি

$$s_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1}$$

$$= \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

কিন্তু ধারাটির পদ সংখ্যা অসীম হলে এর সমষ্টি নির্ণয়ের ক্ষেত্রে আমাদের আলাদাভাবে কিছু ভাবতে হবে কিনা অনুসন্ধান করে দেখি। বলো তো ধারাটি কখন অসীম হবে? n এর মান অসীম হলে ধারাটিও অসীম হবে। এই অবস্থায় আমরা লিখতে পারি,

$$s_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots$$

এখন বলো তো, এই ধারাটির সমষ্টি কত হবে? ধারাটির সমষ্টি r এর মানের উপর নির্ভর করে।

চিন্তা করে দেখো,

ক) যখন $|r| < 1$ অর্থাৎ $-1 < r < 1$

তখন, n এর মান বৃদ্ধি পেয়ে অসীম হলে, অর্থাৎ $n \to \infty$ হলে $|r^n|$ এর মান ক্রমশঃ হ্রাস পেয়ে 0 এর কাছাকাছি হবে। তখন ধারাটির সমষ্টি

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

কে আমরা লিখতে পারি,

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

খ) যখন $|r| > 1$ অর্থাৎ $r > 1$ অথবা $r < -1$

তখন n এর মান বৃদ্ধি পাওয়ার সাথে সাথে $|r^n|$ এর মানও ক্রমশঃ বৃদ্ধি পেতে থাকবে এবং তখন কোনো নির্দিষ্ট মান পাওয়া যাবে না। এক্ষেত্রে ধারাটির কোনো সমষ্টি নির্ণয় করা সম্ভব নয়।

$-1 < r < 1$

$r = \frac{1}{2}$ হলে, $r^n = ??$

$r^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$,

$r^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$,

$r^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}, \ldots$

সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে, n এর মান যতই বাড়ছে, r^n এর ততই কমছে।

জোড়ায় কাজ

প্রত্যেক ক্ষেত্রে অসীম গুণোত্তর ধারা তৈরি করো।

i) $a = 4, r = \frac{1}{2}$ ii) $a = 2, r = -\frac{1}{3}$

iii) $a = \frac{1}{3}, r = 3$ iv) $a = 1, r = -\frac{2}{7}$

সমস্যা

ধরো, তুমি তোমার বাড়ির পাশে অথবা বাগানে একটি চারা গাছ রোপণ করলে। এক বছর পর চারা গাছটির উচ্চতা 1 মিটার হলো। পরবর্তী বছর এর উচ্চতা 0.8 মিটার বৃদ্ধি পেল। প্রতি বছর গাছটির উচ্চতা পূর্বের বছরের বৃদ্ধিপ্রাপ্ত উচ্চতার 80% বাড়ে। এভাবে বাড়তে থাকলে গাছটির উচ্চতা সর্বোচ্চ কত মিটার হতে পারবে?

সমাধান

প্রথম বছর গাছটির উচ্চতা ছিল = 1 মিটার।

দ্বিতীয় বছর গাছটির উচ্চতা বৃদ্ধি পেল = 0.8 মিটার।

তৃতীয় বছর গাছটির উচ্চতা বৃদ্ধি পেল = $(0.8 \times 80\%) = 0.64$ মিটার।

চতুর্থ বছর গাছটির উচ্চতা বৃদ্ধি পেল = $(0.64 \times 80\%) = 0.512$ মিটার।

এভাবেই গাছটির উচ্চতা প্রতি বছর বাড়তে থাকল। চলো, প্রতি বছর গাছটির বৃদ্ধিতে কোনো ধারা খুঁজে পাই কিনা।

গাছটির বৃদ্ধির ধারাটি হবে = $1 + 0.8 + 0.64 + 0.512 + \cdots$

এখানে, ধারাটির প্রথম পদ $a = 1$ এবং সাধারণ অনুপাত $r = \frac{0.8}{1} = \frac{0.64}{0.8} = 0.8$

যেহেতু, ধারাটি একটি অসীম গুণোত্তর ধারা এবং $-1 < r < 1$

সুতরাং ধারাটির সমষ্টি

$$s_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-0.8} = \frac{1}{0.2} = 5\text{মিটার।}$$

তাহলে, গাছটির সর্বোচ্চ উচ্চতা হবে 5 মিটার।

অনুশীলনী

১. নিচের অনুক্রমগুলো সমান্তর, গুণোত্তর, ফিবোনাচ্চি নাকি কোনোটিই নয়? কেন? সাধারণ পদ নির্ণয়সহ ব্যাখ্যা করো।

(i) 2, 5, 10, 17,...... (ii) –2, 7, 12, 17,...... (iii) –12, 24, –48, 96,......

(iv) 13, 21, 34, 55,...... (v) $5, -3, \frac{9}{5}, -\frac{27}{25}$,...... (vi) $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}$,......

২. নিচের অনুক্রমগুলোর শূন্যস্থান পূরণ করো।

(i) 2, 9, 16, ____,____, 37,____. (ii) –35, ____, ____, –5, 5, ____.

(iii) ____,____, ____, 5, –4,____. (iv) ____, $10x^2$, $50x^3$,____, ____,

৩. ছকের খালি ঘরগুলো পূরণ করো।

ক্রমিক নং	১ম পদ a	সাধারণ অন্তর d	পদসংখ্যা n	nতম পদ	s_n
i.	2	5	10		
ii.	–37	4			–180
iii.	29	–4		–23	
iv.		–2	13	10	
v.	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{31}{4}$	
vi.	9	–2			–144
vii.	7		13	35	
viii.		7	25		2000
ix.		$-\frac{3}{4}$	15		$\frac{165}{4}$
x.	2	2			2550

৪. তোমার পড়ার ঘরের মেঝেতে তুমি সমবাহু ত্রিভুজাকৃতির একটি মোজাইক করতে চাও, যার বাহুর দৈর্ঘ্য 12 ফুট। মোজাইকে সাদা ও নীল রঙের টাইলস থাকবে। প্রতিটি টাইলস 12 ইঞ্চি দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট সুষম ত্রিভুজাকৃতি। টাইলসগুলো বিপরীত রঙে বসিয়ে মোজাইকটি সম্পূর্ণ করতে হবে।

ক) ত্রিভুজাকৃতির মোজাইকটির একটি মডেল তৈরি করো।

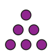
খ) প্রত্যেক রঙের কয়টি করে টাইলস লাগবে?

গ) মোট কতগুলো টাইলস প্রয়োজন হবে?

৫. ছকের খালি ঘরগুলো পূরণ করো:

ক্রমিক নং	১ম পদ a	সাধারণ অনুপাত r	পদসংখ্যা n	nতম পদ	s_n
i.	128	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	
ii.		-3	8	-2187	
iii.	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\sqrt{2}$		$8\sqrt{2}$	
iv.		-2	7	128	
v.	2	2			254
vi.	12			768	1524
vii.	27	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$	
viii.		4	6		4095

৬.

চিত্র নং	চিত্র	কয়েন সংখ্যা
1		1
2		3
3		6
4		10
.....	....	....

ছক- ১

n	সারির সংখ্যাগুলো	সারির সংখ্যাগুলোর সমষ্টি
1	1 1	$1 + 1 = 2$
2	1 2 1	$1 + 2 + 1 = 4$
3	1 3 3 1	$1 + 3 + 3 + 1 = 8$
4	1 4 6 4 1	$1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$
.....	... ...	... ...

ছক- ২

ক) ছক- ১ এর অনুক্রমটি নিবিড়ভাবে পর্যবেক্ষণ করো। অতঃপর ১০ম চিত্রটি গঠন করে কয়েন সংখ্যা নির্ণয় করো।

খ) প্রদত্ত তথ্যের আলোকে nতম চিত্রের কয়েন সংখ্যা নির্ণয় করো।

গ) $n = 5$ হলে, ছক- ২ এর ২য় কলামের সংখ্যাগুলো নির্ণয় করো এবং দেখাও যে, nতম সারির সংখ্যাগুলোর সমষ্টি 2^n সূত্রকে সমর্থন করে।

ঘ) প্রতিটি সারির সমষ্টিগুলো নিয়ে একটি ধারা তৈরি করো এবং ধারাটির ১ম n সংখ্যক পদের সমষ্টি 2046 হলে, n এর মান নির্ণয় করো।

৭. n এর মান নির্ণয় করো, যেখানে $n \in N$.

i. $\sum_{k=1}^{n}(20 - 4k) = -20$ ii. $\sum_{k=1}^{n}(3k + 2) = 1105$

iii. $\sum_{k=1}^{n}(-8).\ (0.5)^{k-1} = -\frac{255}{16}$ iv. $\sum_{k=1}^{n}(3)^{k-1} = 3280$

৮. একটি সমান্তর ধারার প্রথম, দ্বিতীয় ও ১০তম পদ যথাক্রমে একটি গুণোত্তর ধারার প্রথম, চতুর্থ ও ১৭তম পদের সমান।

ক) সমান্তর ধারার ১ম পদ a, সাধারণ অন্তর d এবং গুণোত্তর সাধারণ অনুপাত r হলে, ধারা দুইটি সমন্বয়ে দুইটি সমীকরণ গঠন করো।

খ) সাধারণ অনুপাত r এর মান নির্ণয় করো।

গ) গুণোত্তর ধারাটির ১০তম পদ 5120 হলে, a ও d এর মান নির্ণয় করো।

ঘ) সমান্তর ধারাটির ১ম 20টি পদের সমষ্টি নির্ণয় করো।

৯. একটি সমবাহু ত্রিভুজ আঁকো। এর বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু সংযোগ করে আরেকটি সমবাহু ত্রিভুজ আঁকো। ওই ত্রিভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু সংযোগ করে আরেকটি সমবাহু ত্রিভুজ আঁকো। এইভাবে পর্যায়ক্রমে ১০টি ত্রিভুজ অঙ্কন করলে এবং সর্ববহিস্থ ত্রিভুজটির প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য 64 মিমি হলে, সবগুলো ত্রিভুজের পরিসীমার সমষ্টি কত হবে নির্ণয় করো।

১০. শাহানা তার শিক্ষা প্রতিষ্ঠানে একটি চারা গাছ রোপণ করলে। এক বছর পর চারা গাছটির উচ্চতা 1.5 ফুট হলো। পরবর্তী বছর এর উচ্চতা 0.75 ফুট বৃদ্ধি পেল। প্রতি বছর গাছটির উচ্চতা পূর্বের বছরের বৃদ্ধিপ্রাপ্ত উচ্চতার 50% বাড়ে। এভাবে বাড়তে থাকলে 20 বছর পরে গাছটির উচ্চতা কত ফুট হবে?

১১. তুমি তোমার পরিবারের গত ছয় মাসের খরচের হিসাব জেনে নাও। প্রতি মাসের খরচকে একেকটি পদ বিবেচনা করে সম্ভব হলে একটি ধারায় রূপান্তর করো। তারপর নিচের সমস্যাগুলো সমাধানের চেষ্টা করো।

ক) ধারা তৈরি করা সম্ভব হয়েছে কী? হলে, কোন ধরনের ধারা পেয়েছ ব্যাখা করো।

খ) ধারার সমষ্টিকে একটি সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ করো।

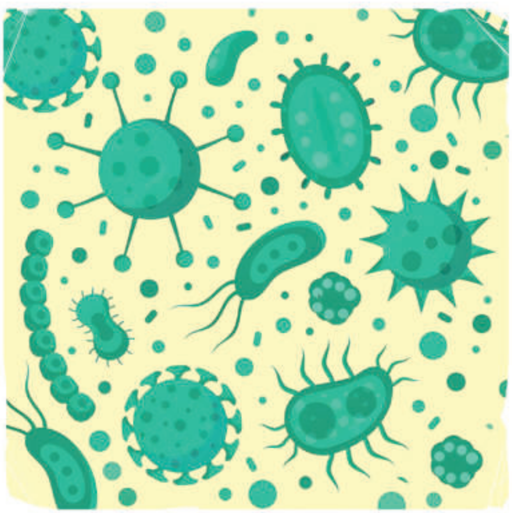
গ) পরবর্তী ছয় মাসে সম্ভাব্য মোট কত খরচ হতে পারে তা নির্ণয় করো।

ঘ) পরিবারের মাসিক/বার্ষিক খরচ সম্পর্কে তোমার উপলব্ধিবোধ লিপিবদ্ধ করো।

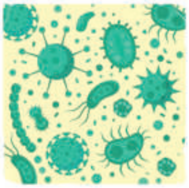
লগারিদমের ধারণা ও প্রয়োগ

এই অভিজ্ঞতায় শিখতে পারবে-

- সূচকের বৈশিষ্ট্য
- লগারিদমের ধারণা
- সূচক ও লগারিদমের মধ্যে সম্পর্ক
- লগারিদমের ভিত্তি ও তার সীমাবদ্ধতা
- লগারিদমের আরগুমেন্ট ও তার সীমাবদ্ধতা
- লগারিদমের সূত্রাবলি ও তাদের প্রমাণ
- লগারিদমের বৈশিষ্ট্য
- লগারিদমের প্রয়োগ



লগারিদমের ধারণা ও প্রয়োগ



তোমরা কি জানো ব্যাকটেরিয়া খুব দ্রুতগতিতে বংশ বৃদ্ধি করে। মনে করো, কোনো একটি পরিবেশে পরীক্ষা করে ব্যাকটেরিয়ার সংখ্যা শনাক্ত করা হলো 4500. এই ব্যাকটেরিয়া প্রতি ঘণ্টায় বংশ বৃদ্ধি করে দ্বিগুণ হয়। তোমরা নিশ্চয় বুঝতে পারছো কয়েক ঘন্টার মধ্যে ব্যাকটেরিয়ার সংখ্যা অনেক বেড়ে যাবে। যেমন–

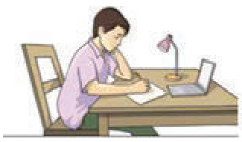
১ম ঘণ্টায় ব্যাকটেরিয়ার সংখ্যা $= 4500 \times 2 = 9 \times 1000 = 9 \times 10^3$ আকারে প্রকাশ করা যায়।

২য় ঘণ্টায় ব্যাকটেরিয়ার সংখ্যা $= 9000 \times 2 = 1.8 \times 10000 = 1.8 \times 10^4$ আকারে প্রকাশ করা যায়।

তোমরা জানো, এ ধরনের আকারকে সূচক আকার বলে। দেখতেই পারছো সূচকের সাহায্যে আমরা খুব বড়ো বড়ো সংখ্যাকে অতি সহজে প্রকাশ করতে পারি।

১ম থেকে ১০ম ঘণ্টা পর্যন্ত ব্যাকটেরিয়ার বংশ বৃদ্ধি কত হয় তা হিসাব করে নিচের ছক ৩.১ পূরণ করো।

একক কাজ-০১



ছক- ৩.১

সময়	ব্যাকটেরিয়ার সংখ্যা	সূচকের মাধ্যমে প্রকাশ
১ম ঘণ্টা	$4500 \times 2 = 9000$	4500×2^1
২য় ঘণ্টা	$9000 \times 2 = 18000$	4500×2^2
৩য় ঘণ্টা		
৪র্থ ঘণ্টা		
৫ম ঘণ্টা		
৬ষ্ঠ ঘণ্টা		
৭ম ঘণ্টা		
৮ম ঘণ্টা		
৯ম ঘণ্টা		
১০ম ঘণ্টা		

অতএব, উপরের হিসাব থেকে আমরা দেখতে পাই, খুব বড়ো সংখ্যাকে সূচকের সাহায্যে সহজে প্রকাশ করা যায়।

এখন তোমরা কি লিখতে পারবে যে, n-তম ঘন্টায় ব্যাকটেরিয়ার সংখ্যা কত হবে? পর্যবেক্ষণ করে দেখো

n-তম ঘন্টায় ব্যাকটেরিয়ার সংখ্যা হবে 4500×2^n. যদি n-তম ঘন্টায় ব্যাকটেরিয়ার সংখ্যা $147{,}456{,}000$ হয়, তবে আমরা লিখতে পারি $4500 \times 2^n = 147{,}456{,}000$. এই ধরনের সমীকরণকে **সূচক সমীকরণ** বলে। এবার বলো তো এখান থেকে আমরা n এর মান কীভাবে বের করব? অর্থাৎ, কোনো সূচক সমীকরণ থেকে অজানা সূচক রাশির মান কীভাবে বের করা যায়? সূচক সমীকরণের সাধারণ রূপ হলো, $b^n = a$ যেখানে $b > 0$ এবং $b \neq 1$. এখন প্রশ্ন হলো, আমরা কীভাবে n-এর মান বের করব?

এক্ষেত্রে আমরা লগারিদম ব্যবহার করতে পারি। লগারিদম ব্যবহার করে সূচক সমীকরণটিকে লেখা যায় $b^n = a \Leftrightarrow \log_b a = n,$ অর্থাৎ n হলো a এর b ভিত্তিক log।

$b^n = a$ (যেখানে $b > 0$ এবং $b \neq 1$) যদি এবং কেবল যদি $n = \log_b a$

এখানে b কে log এর ভিত্তি (base) বলা হয়। log হলো logarithm শব্দটির সংক্ষিপ্ত রূপ। তোমাদের মনে অবশ্যই প্রশ্ন জাগছে, কে সর্বপ্রথম log-এর ধারণা দিয়েছেন? তাহলে চলো আমরা log সম্পর্কে সংক্ষেপে একটু জেনে নিই। logos এবং arithmos দুটি গ্রিক শব্দ থেকে logarithm শব্দটির উৎপত্তি। logos অর্থ অনুপাত এবং arithmos অর্থ সংখ্যা। তাহলে logarithm শব্দটির অর্থ দাঁড়ায় সংখ্যার অনুপাত। স্কটল্যান্ডের গণিতবিদ জন নেপিয়ার [John Napier] তার একটি বইয়ে logarithm শব্দটি সর্বপ্রথম ব্যবহার করেন। তোমরা ইতোমধ্যে সূচক বা সূচকীয় রাশি সম্পর্কে বিস্তারিত জেনেছ। আসলে সূচকীয় রাশির মান বের করার জন্যই লগ বা logarithm ব্যবহার করা হয়।

John Napier

সূচক ও log কিন্তু একই ধারণা, তবে তাদের দুইভাবে প্রকাশ করা যায়। যে কোনো সংখ্যাকে কখনো আমরা সূচকের মাধ্যমে প্রকাশ করি। আবার ওই একই সংখ্যাকে কখনো আমরা log এর মাধ্যমেও প্রকাশ করি। তাতে সংখ্যাটির মানের কোনো পরিবর্তন হয় না। যেমন 9 কে আমরা 3^2 আকারে প্রকাশ করতে পারি। তাহলে $3^2 = 9$ হলো সূচকীয় রাশির একটি সমতা। এই সূচক 2 কে আর কীভাবে লিখা যায় তোমরা কি তা বলতে পারো? 2 হলো 9 এর 3 ভিত্তিক log. কথাটিকে গাণিতিকভাবে প্রকাশ করলে হয়, $2 = \log_3 9$. তেমনিভাবে, সূচকীয় সম্পর্ক $2^3 = 8$ থেকে বলা যায়, 3 হলো 8 এর 2 ভিত্তিক log. কথাটিকে গাণিতিকভাবে প্রকাশ করলে হয়, $3 = \log_2 8$.

লক্ষ করো, সূচকীয় সমতা $2^3 = 8$ এর ক্ষেত্রে, সূচকের ভিত্তি 2. আবার, $3 = \log_2 8$ এর ক্ষেত্রে, log এর ভিত্তি 2.

অতএব, সূচকের ভিত্তি ও log এর ভিত্তি একই বা সমান হয়।

জোড়ায় কাজ

সূচকীয় সমতা ও log এর সম্পর্ককে নিচের ছকের (ছক-৩.২) মাধ্যমে দেখানো হলো। খালি ঘরগুলো পূরণ করো:

ছক- ৩.২		
সূচকীয় সমতা	log এর ভাষায় প্রকাশ	log এর মাধ্যমে গাণিতিক প্রকাশ
$3^2 = 9$	সূচক 2 হলো 9 এর 3 ভিত্তিক log	$2 = \log_3 9$
$2^3 = 8$		
$7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$		
$2^{-6} = \frac{1}{64}$		$-6 = \log_2 \frac{1}{64}$
	সূচক -4 হলো $\frac{1}{81}$ এর 3 ভিত্তিক log	

আমরা এতক্ষণে সূচকের সম্পর্ককে কীভাবে log এর ভাষায় প্রকাশ করে গাণিতিকভাবে উপস্থাপন করা যায় তা শিখলাম। এখন নিচের ছকে সূচকের সম্পর্ককে log এর মাধ্যমে এবং log এর সম্পর্ককে সূচকের মাধ্যমে প্রকাশ করে নিজের অভিজ্ঞতাকে যাচাই করো।

মাথা খাটাও **জোড়ায় কাজ**

সূচকের সম্পর্ককে log এর মাধ্যমে প্রকাশ করো।	
সূচকের সম্পর্ক	log এর সম্পর্ক
$2^4 = 16$	$4 = \log_2 16$
$3^4 = 81$	
$2^7 = 128$	
$2^{-3} = \frac{1}{8}$	
$5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$	
$3^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$	
$10^2 = 100$	
$10^5 = 100000$	

log এর সম্পর্ককে সূচকের মাধ্যমে প্রকাশ করো।	
log এর সম্পর্ক	সূচকের সম্পর্ক
$3 = \log_2 8$	$2^3 = 8$
$6 = \log_2 64$	
$3 = \log_3 27$	
$4 = \log_{10} 10000$	
$-4 = \log_2 \left(\frac{1}{16}\right)$	
$\frac{1}{2} = \log_2 \sqrt{2}$	
$3 = \log_{10} 1000$	
$t = \log_b y$	

লগের ভিত্তির সীমাবদ্ধতা

তোমরা হয়তো লক্ষ করেছ যে, সূচক সম্পর্কটিকে log এ রূপান্তরের সময় ভিত্তি b এর উপর একটি শর্ত দেয়া হয়েছে। শর্তটি হলো, $b > 0$ এবং $b \neq 1$. এটি লগের ভিত্তির সীমাবদ্ধতা। আমরা এখন এই সীমাবদ্ধতা প্রমাণ করব।

শর্ত-০১: যখন $b < 0$.

আমরা জানি, $(-3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-3}$, যা অবাস্তব। এই সম্পর্ক থেকে পাই, $\frac{1}{2} = \log_{-3}\sqrt{-3}$

যেহেতু ভিত্তি -3 হওয়ার কারণে $\sqrt{-3}$ অবাস্তব মান পাওয়া যায়, একারণে log এর ভিত্তি ঋণাত্মক সংখ্যা গ্রহণযোগ্য নয়। সুতরাং, log এর ভিত্তি ঋণাত্মক সংখ্যা হতে পারে না।

শর্ত-০২: যখন $b = 0$.

আমরা জানি, $0^2 = 0$ হলে $2 = \log_0 0$ এবং $0^3 = 0$ হলে $3 = \log_0 0$

তোমরা কী লক্ষ করছো? উপরের সম্পর্কগুলো থেকে লেখা যায়, $2 = 3$ যা অযৌক্তিক।

সুতরাং $b \neq 0$. অর্থাৎ log এর ভিত্তি 0 হতে পারে না।

শর্ত-০৩: যখন $b = 1$.

আমরা জানি, যে কোনো পূর্ণ সংখ্যা n এর জন্য, $1^n = 1$. সুতরাং, $n = \log_1 1$. অর্থাৎ, $n = 4$ হলে, $4 = \log_1 1 = 0$, যা অযৌক্তিক। সুতরাং $b \neq 1$. অর্থাৎ, log এর ভিত্তি 1 হতে পারে না।

উপরের শর্ত তিনটি থেকে আমরা এই সিদ্ধান্তে উপনীত হতে পারি যে,

- log এর ভিত্তি ঋণাত্মক হতে পারে না।
- log এর ভিত্তি 0 হতে পারে না।
- log এর ভিত্তি 1 হতে পারে না।

সুতরাং, আমরা বলতে পারি, log এর ভিত্তি 1 বাদে সকল ধনাত্মক সংখ্যা।

লগের আরগুমেন্ট (Argument) ও তার সীমাবদ্ধতা

তোমরা জেনেছো, $\log_b n$ এর b কে ভিত্তি বলে। তাহলে n কে আমরা কী বলবো? n কে লগের **আরগুমেন্ট** (argument) বলা হয়। log এর আরগুমেন্টেরও সীমাবদ্ধতা আছে।

$b > 0$ এবং $b \neq 1$ হলে n এর সকল মানের জন্যেই b^n সর্বদা ধনাত্মক হয়। অর্থাৎ, $b^n = y > 0$ এবং তখন $n = \log_b y$. একারণে, log এর আরগুমেন্ট সবসময়ই ধনাত্মক সংখ্যা। এটি লগ সম্পর্কে খুবই সতর্কতামূলক একটি তথ্য।

লগারিদমের প্রকারভেদ

লগারিদম দুই প্রকার। যথা-

- স্বাভাবিক লগারিদম (natural logarithm)
- সাধারণ লগারিদম (common logarithm)

স্বাভাবিক লগারিদম

যদি log এর ভিত্তি e হয়, তখন তাকে **স্বাভাবিক লগারিদম** বলে। $\log_e x$ কে $\ln x$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। জন নেপিয়ার e কে ভিত্তি ধরে প্রথম লগারিদম প্রকাশ করেন। এজন্য এই লগারিদম নেপিরিয়ান লগারিদম বা e ভিত্তিক লগারিদম বলে অভিহিত। e একটি অমূলদ সংখ্যা যার মান $e = 2.71828183\ldots$।

সাধারণ লগারিদম

ইংল্যান্ডের আরেকজন গণিতবিদ হেনরি ব্রিগস (Henry Briggs) লগারিদম বিষয়ে অধিকতর গবেষণা করে 10 কে ভিত্তি ধরে একটি লগ টেবিল বা লগ সারণি প্রকাশ করেন। তার প্রকাশিত লগারিদম ব্রিগসিয়ান লগারিদম বা 10 ভিত্তিক লগারিদম বলে সমধিক পরিচিত। 10 ভিত্তিক লগারিদমকে **সাধারণ লগারিদম** (common logarithm) বলে। সাধারণ লগারিদমকে $\log_{10} x$ আকারে লিখে প্রকাশ করা হয়।

তোমরা লক্ষ রাখবে যে, $\ln x$ এর ভিত্তি e এবং $\log x$ এর ভিত্তি 10. অর্থাৎ,

$$\log_e x = \ln x \text{ এবং } \log_{10} x = \log x$$

লগ বিষয়ক কয়েকটি সূত্র

যেহেতু লগের ধারণা এসেছে সূচক থেকে, সুতরাং লগের সূত্রগুলো পেতে হলে আমাদের সূচকের সূত্র জানতে হবে। আমরা সূচকের সূত্র আগেই জেনে এসেছি। কাজের সুবিধার্থে আমরা সূচকের সূত্রগুলো এখানে লিখে রাখছি।

সূচকের সূত্রসমূহ

যেকোনো বাস্তব সংখ্যা x ও y এবং যে কোনো স্বাভাবিক সংখ্যা m ও n এর জন্য,

1. $x^m \times x^n = x^{m+n}$
2. $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}\ (x \neq 0)$
3. $(xy)^n = x^n y^n$
4. $(\dfrac{x}{y})^n = \dfrac{x^n}{y^n} \quad (y \neq 0)$
5. $(x^m)^n = x^{mn}$
6. $x^0 = 1 \quad (x \neq 0)$
7. $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n} \quad (x \neq 0)$
8 $(\dfrac{x}{y})^n = (\dfrac{y}{x})^{-n}$
$(x \neq 0, y \neq 0)$

লগ বিষয়ক কয়েকটি সূত্র এবং এর প্রমাণ

সূত্র ১. $\log_b 1 = 0$

প্রমাণ: সূচক থেকে জানা আছে, $b^0 = 1$

এই সূচকীয় রাশিকে লগের মাধ্যমে প্রকাশ করলে দাঁড়ায়,

$\log_b 1 = 0$ (প্রমাণিত)

সূত্র ২. $\log_b b = 1$

প্রমাণ: সূচক থেকে জানা আছে, $b^1 = b$

এই সূচকীয় রাশিকে লগের মাধ্যমে প্রকাশ করলে দাঁড়ায়,

$\log_b b = 1$ (প্রমাণিত)

সূত্র ৩. $\log_b(\mathrm{AB}) = \log_b A + \log_b B$

প্রমাণ: মনে করি, $\log_b A = x$ এবং $\log_b B = y$

এই লগারিদমীয় রাশিকে সূচকের মাধ্যমে প্রকাশ করলে দাঁড়ায়,

$b^x = A$ এবং $b^y = B$

বা, $b^x b^y = AB$

বা, $b^{x+y} = AB$

এই সূচকীয় রাশিকে লগের মাধ্যমে প্রকাশ করলে দাঁড়ায়,

$\log_b (AB) = x + y = \log_b A + \log_b B$ [x ও y এর মান বসিয়ে]

$\therefore \log_b (AB) = \log_b A + \log_b B$ (প্রমাণিত)।

সূত্র ৪. $\log_b (\frac{A}{B}) = \log_b A - \log_b B$

প্রমাণ: মনে করি, $\log_b A = x$ এবং $\log_b B = y$

এই লগারিদমীয় রাশিকে সূচকের মাধ্যমে প্রকাশ করলে দাঁড়ায়,

$b^x = A$ এবং $b^y = B$

$$\therefore \frac{b^x}{b^y} = \frac{A}{B}$$

বা, $b^{x-y} = \frac{A}{B}$

এই সূচকীয় রাশিকে লগের মাধ্যমে প্রকাশ করলে দাঁড়ায়,

$\log_b (\frac{A}{B}) = x - y = \log_b A - \log_b B$ [x ও y এর মান বসিয়ে]

$\therefore \log_b (\frac{A}{B}) = \log_b A - \log_b B$ (প্রমাণিত)।

সূত্র ৫. $\log_b A^x = x\log_b A$

প্রমাণ: মনে করি, $\log_b A = y$

এই লগারিদমীয় রাশিকে সূচকের মাধ্যমে প্রকাশ করলে দাঁড়ায়,

$b^y = A$

বা, $(b^y)^x = A^x$ [উভয়পক্ষে x ঘাত নিয়ে]

বা, $b^{xy} = A^x$

এই সূচকীয় রাশিকে লগের মাধ্যমে প্রকাশ করলে দাঁড়ায়,

$\log_b A^x = xy = x \log_b A$ [y এর মান বসিয়ে]

$\therefore \log_b A^x = x \log_b A$ (প্রমাণিত)।

সূত্র ৬. $\log_a b \times \log_b c = \log_a c$

প্রমাণ: মনে করি, $\log_b c = x$ এবং $\log_a c = y$

এই লগারিদমীয় সম্পর্ক দুইটিকে সূচকের মাধ্যমে প্রকাশ করলে দাঁড়ায়,

$b^x = c$ এবং $a^y = c$

উপরোক্ত সম্পর্ক দুইটি থেকে লিখা যায়,

$b^x = a^y$

উভয়পক্ষে $\frac{1}{x}$ ঘাত নিয়ে পাই,

$(b^x)^{\frac{1}{x}} = (a^y)^{\frac{1}{x}}$

বা, $b = a^{\frac{y}{x}}$

এই সূচকীয় সম্পর্ককে লগের মাধ্যমে প্রকাশ করলে দাঁড়ায়,

$\log_a b = \frac{y}{x}$

$\therefore \log_a b \times x = y$

এখন, x ও y এর মান বসাই,

$\therefore \log_a b \times \log_b c = \log_a c$ (প্রমাণিত)।

সূত্র ৭. $b^{\log_b a} = a$

প্রমাণ: মনে করি, $\log_b a = x$

এই লগারিদমীয় সম্পর্কটিকে সূচকের মাধ্যমে প্রকাশ করলে দাঁড়ায়,

$b^x = a$

এখন, x এর মান বসাই,

$\therefore b^{\log_b a} = a$ (প্রমাণিত)।

সূত্র ৮. $x^{\log_b y} = y^{\log_b x}$

প্রমাণ: মনে করি, $\log_b y = m$ এবং $\log_b x = n$

এই লগারিদমীয় সম্পর্ক দুইটিকে সূচকের মাধ্যমে প্রকাশ করলে দাঁড়ায়,

$b^m = y$ এবং $b^n = x$

এখন, $b^m = y$

উভয়পক্ষে n ঘাত নিয়ে পাই,

$(b^m)^n = y^n$

$\therefore b^{mn} = y^n$ ....(1)

আবার, $b^n = x$

উভয়পক্ষে m ঘাত নিয়ে পাই,

$(b^n)^m = x^m$

$\therefore b^{mn} = x^m$ ....(2)

(1) ও (2) নং সম্পর্ক থেকে লিখা যায়,

$x^m = y^n$

এখন, m ও n এর মান বসাই,

$\therefore x^{\log_b y} = y^{\log_b x}$ (প্রমাণিত)।

সূত্র ৯. $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

প্রমাণ: আমরা ইতোমধ্যে জেনেছি, $\log_a b \times \log_b c = \log_a c$

এখন, $c = a$ বসাই,

$\log_a b \times \log_b a = \log_a a$

বা, $\log_a b \times \log_b a = 1$ [যেহেতু $\log_a a = 1$]

$\therefore \log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ (প্রমাণিত)।

সূত্র ১০. $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

প্রমাণ: 6 নম্বর সূত্র অনুযায়ী, $\log_a b \times \log_b x = \log_a x$

$$\Rightarrow \frac{1}{\log_b a} \times \log_b x = \log_a x \qquad [\because \log_a b = \frac{1}{\log_b a}]$$

অর্থাৎ, $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ (প্রমাণিত)

ভিত্তি যাই হোক না কেন, লগারিদম নিচের সূত্রগুলো মেনে চলে।

1. $\log_b 1 = 0$ 2. $\log_b b = 1$ 3. $\log_b(AB) = \log_b A + \log_b B$ 4. $\log_b(\frac{A}{B}) = \log_b A - \log_b B$	5. $\log_b A^x = x\log_b A$ 6. $\log_a b \times \log_b c = \log_a c$ 7. $b^{\log_b a} = a$ 8. $x^{\log_b y} = y^{\log_b x}$	9. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ 10. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

সূচকের কতিপয় বৈশিষ্ট্য

i. $b > 0, b \neq 1$ এর জন্যে $b^x = b^y$ হলে $x = y$.

ii. $a > 0, b > 0, x \neq 0$ এর জন্যে $a^x = b^x$ হলে $a = b$.

iii. $\mathrm{b} > 0, b \neq 1$ এর জন্যে $b^x = 1$ হলে $x = 0$.

iv. $\mathrm{b} > 0, x \neq 0$ এর জন্যে $b^x = 1$ হলে $b = 1$.

লগের কতিপয় বৈশিষ্ট্য

লগের বিভিন্ন বৈশিষ্ট্যগুলোর মধ্যে উল্লেখযোগ্য কতকগুলো বৈশিষ্ট্য নিচে উল্লেখ করা হলো।

1. $b > 1$ এবং $x > 1$ হলে $\log_b x > 0$ হয়।
2. $0 < b < 1$ এবং $0 < x < 1$ হলে $\log_b x > 0$ হয়।
3. $b > 1$ এবং $0 < x < 1$ হলে $\log_b x < 0$ হয়।
4. $x > 0, y > 0$ এবং $b \neq 1$ এর জন্য যদি $\log_b x = \log_b y$ হয়, তবে $x = y$ হয়।

চলো লগের হিসাব নিকাশ করি

উদাহরণ ১. $\log_5 125 = \log_5 5^3 = 3\log_5 5$ [যেহেতু $\log_a A^x = x\log_a A$]

$= 3 \times 1$ [যেহেতু $\log_a a = 1$]

$= 3$

উদাহরণ ২. $\log_c\left(\frac{2\sqrt{40}}{\sqrt{160}}\right) = \log_c\left(\frac{2\sqrt{4 \times 10}}{\sqrt{16 \times 10}}\right) = \log_c\left(\frac{2 \times 2\sqrt{10}}{4\sqrt{10}}\right)$

$= \log_c\left(\frac{4\sqrt{10}}{4\sqrt{10}}\right) = \log_c 1 = 0$ [যেহেতু $\log_c 1 = 0$]

উদাহরণ ৩. $\log_{10}3 + 2\log_{10}5 = \log_{10}3 + \log_{10}5^2$ [যেহেতু $x\log_a A = \log_a A^x$]

$= \log_{10}3 + \log_{10}25$

$= \log_{10}(3 \times 25)$ [যেহেতু $\log_a(AB) = \log_a A + \log_a B$]

$= \log_{10}75$

উদাহরণ ৪. $\log_x\left(\frac{1}{49}\right) = -2$ সম্পর্ক থেকে x এর মান নির্ণয় করি।

এই লগারিদমীয় রাশিকে সূচকের মাধ্যমে প্রকাশ করলে দাঁড়ায়,

$x^{-2} = \frac{1}{49}$

বা, $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{49}$

বা, $x^2 = 49$

বা, $x = \sqrt{49}$ [ঋণাত্মক মান বর্জন করে; কারণ ভিত্তি x কখনো ঋণাত্মক হতে পারে না]

$\therefore x = 7$

জোড়ায় কাজ

মান নির্ণয় করো:

1. $\log_a\left(\frac{\sqrt{140}}{2\sqrt{30}}\right) + \log_a\left(\frac{3\sqrt{12}}{2\sqrt{27}}\right) + \log_a\left(\frac{a^3\sqrt{b^2}}{b\sqrt{a^2}}\right)$
2. $2\log_{10}3 + 3\log_{10}4 + 2\log_{10}5$

লগারিদমের মান নির্ণয়ে ডিভাইসের ব্যবহার

আচ্ছা বলো তো, আমরা যদি $\log_2 3$ এর মান বের করতে চাই তাহলে কীভাবে করব? বোঝার জন্য লগকে সূচকে রূপান্তর করি। ধরি, $\log_2 3 = x$. তাহলে, $2^x = 3$. এবার বলো তো, x এর মান কত হলে $2^x = 3$ হবে? সমাধানটি সহজ নয়, তাই না? একারণেই লগটেবিল তৈরি করা হয়েছিল। বর্তমানে ক্যালকুলেটর বা কম্পিউটার এর মতো বিভিন্ন ডিভাইস ব্যবহার করে আমরা সহজেই এই মানগুলো বের করতে পারি।

মাথা খাটাও জোড়ায় কাজ

যে কোনো ডিভাইস ব্যবহার করে নিচের ছক-৩.৩ পূর্ণ করো। কয়েকটি করে দেওয়া হলো। দশমিকের পরে 5 ঘর পর্যন্ত নাও।

ছক-৩.৩

লগ	মান	সূচক	লগ	মান	সূচক
$\log_2 3$	1.58496	$2^{1.58496} \approx 3$	$\log_2 16$		
$\log_3 5$			$\log_5 3$		
$\log_4 7$			$\log_{10} 4$	0.60206	$10^{0.60206} \approx 4$

লগারিদমের ব্যবহার

বাস্তব জীবনে লগারিদমের অনেক ব্যবহার রয়েছে। নিচে কয়েকটি উদাহরণ আলোচনা করা হলো।

চক্রবৃদ্ধি মুনাফায় লগারিদম

তোমরা সবাই চক্রবৃদ্ধি মুনাফার সাথে পরিচিত। স্মরণ করে দেখো চক্রবৃদ্ধি মুনাফায় মূলধনের সূত্রটি নিম্নরূপ।

$$A = P(1 + r)^n$$

যেখানে, P প্রারম্ভিক মূলধন, A চক্রবৃদ্ধি মূলধন, r চক্রবৃদ্ধি মুনাফার হার এবং n সময়কাল।

সমস্যা: 8% চক্রবৃদ্ধি মুনাফা হারে চক্রবৃদ্ধি মূলধন কত বছরে দ্বিগুণ হবে?

সমাধান: ধরি, প্রারম্ভিক মূলধন $=P$, চক্রবৃদ্ধি মূলধন $A = 2\text{P}$ এবং চক্রবৃদ্ধি মুনাফার হার $\text{r} = 8\% = \dfrac{8}{100} = 0.08$.

সুতরাং সূত্র থেকে আমরা পাই,

$$2P = P(1 + 0.08)^n$$

বা, $2 = (1+0.08)^n$

বা, $2 = (1.08)^n$

বা, $n = \log_{1.08} 2 \approx 9$

সুতরাং মূলধন প্রায় 9 বছরে দ্বিগুণ হবে।

মাথা খাটাও জোড়ায় কাজ

12% চক্রবৃদ্ধি মুনাফা হারে চক্রবৃদ্ধি মূলধন কত বছরে 40% বৃদ্ধি পাবে?

বস্তুর অবচয় পরিমাপে লগারিদম

একটি নির্দিষ্ট সময় পর কোনো বস্তুর মূল্যহ্রাসকে ওই বস্তুর অবচয় (depreciation) বলে। কোনো বস্তুর অবচয়ের সূত্র নিম্নরূপ।

$$P_T = P(1 - R)^T$$

যেখানে, প্রারম্ভিক মূল্য P, মূল্যহ্রাসের হার R, সময়কাল T এবং T সময় পরে হ্রাসমূল্য P_T.

সমস্যা: গাড়ির মূল্যের অবচয়

বার্ষিক 4% মূল্যহ্রাস হারে কত সময়ে কোনো একটি গাড়ির মূল্য হ্রাস পেয়ে অর্ধেক হয়ে যাবে?

সমাধান: অবচয়ের সূত্র থেকে আমরা লিখতে পারি,

$$P_T = P(1 - R)^T$$

ধরি, গাড়ির প্রারম্ভিক মূল্য P এবং T সময় পরে গাড়ির মূল্য হ্রাস পেয়ে অর্ধেক হয়ে যায়। অর্থাৎ T সময় পরে গাড়ির মূল্য $P_T = \frac{P}{2}$. মূল্যহ্রাসের হার $\mathrm{R} = 4\% = \frac{4}{100} = 0.04$.

সুতরাং

$$\frac{P}{2} = P(1 - 0.04)^T$$

$$\frac{1}{2} = (1 - 0.04)^T = (0.96)^T$$

$$T = \log_{0.96}(0.5) \approx 17$$

সুতরাং প্রায় 17 বছরে গাড়ির মূল্য হ্রাস পেয়ে অর্ধেক হয়ে যাবে।

মাথা খাটাও জোড়ায় কাজ: কারখানার যন্ত্রপাতির আয়ুস্কাল

কোনো একটি কারখানার যন্ত্রপাতির মূল্য 5 বছরে অর্ধেক হলে, কত বছরে 60% মূল্যহ্রাস পাবে?

জমির উর্বরতা পরিমাপে লগারিদম

তোমরা জানো, জমির উর্বরতার উপর ভালো ফসল হওয়া নির্ভর করে। সময় যাওয়ার সাথে সাথে জমির উর্বরতা কমে যায়। এজন্য ভালো ফসল পেতে জমিতে সার প্রয়োগ করতে হয়। কী পরিমাণ সার প্রয়োগ করতে হবে তা নির্ভর করে জমির উর্বরতা কতটুকু কমেছে, তার উপর। যদি জমির উর্বরতার অবচয়ের হার আমরা জানতে পারি, তবে হিসাব করে প্রয়োজনীয় সারের সঠিক পরিমাণও আমরা নির্ণয় করতে পারবো। ফলে সারের অপচয় যেমন কমবে, তেমনি পরিবেশের ক্ষতিও কম হবে।

উদাহরণ: জমির উর্বরতা বছরে 2% হারে কমতে থাকলে কত বছর পরে জমির উর্বরতার পরিমাণ 30% কমে যাবে? প্রতি কেজি সারে 1 কাঠা জমির উর্বরতা 5% বাড়ালে প্রতি বছর 1 বিঘা জমিতে কী পরিমাণ সার ব্যবহার করতে হবে।

সমাধান: অবচয়ের সূত্র থেকে আমরা জানি,

$$P_T = P(1 - R)^T$$

এখানে, জমির প্রাথমিক উর্বরতা P

উর্বরতা হ্রাসের হার $R = 2\% = 0.02$,

T সময় পরে জমির উর্বরতা $P_T = P \times (100 - 30)\% = P \times 70\% = 0.70P$

সুতরাং, $0.70P = P \times (1 - 0.02)^T$

বা, $0.70 = (0.98)^T$

বা, $T = \log_{0.98}(0.7) \approx 17.6$

সুতরাং 17.6 বছর পরে জমির উর্বরতা 30% কমে যাবে।

আবার, 1 কাঠা জমির উর্বরতা 5% বাড়াতে সার লাগে 1 কেজি

1 কাঠা জমির উর্বরতা 2% বাড়াতে সার লাগে $\frac{2}{5}$ কেজি

1 বিঘা জমির উর্বরতা 2% বাড়াতে সার লাগে $\frac{2}{5} \times 20 = 8$ কেজি [$\because$ 1 বিঘা = 20 কাঠা]

ভূমিকম্পে লগারিদম

আমরা সবাই ভূমিকম্পের সাথে পরিচিত। এটি একটি প্রাকৃতিক দুর্যোগ। ভূমিকম্পের মাত্রা কম হলে এলাকায় ক্ষয়ক্ষতির পরিমাণ তুলনামূলকভাবে কম হয়। আর ভূমিকম্পের মাত্রা বেশি হলে সেই এলাকায় ঘরবাড়ি ও জানমালের ক্ষয়ক্ষতি তুলনামূলকভাবে বেশি হয়। বিজ্ঞানীগণ ভূমিকম্পের মাত্রা পরিমাপ করে থাকেন।

তোমরা কি জানো, ভূমিকম্পের মাত্রা কীভাবে নির্ণয় করা হয়? চার্লস ফ্রান্সিস রিকটার (Charles Francis Richter) ভূমিকম্পের মাত্রা নির্ণয়ের জন্য নিচের সূত্রটি বের করেন।

ভূমিকম্পের মাত্রা, $R = \log\left(\frac{I}{S}\right)$

যেখানে I = ভূমিকম্পের উৎপত্তিস্থল থেকে চতুর্দিকে 100 কিমি দূরত্বের এলাকা জুড়ে সর্বোচ্চ তীব্রতা।

এবং S = আদর্শ ভূমিকম্পের তীব্রতা, যার মান 1 micron $= \frac{1}{10000}$ সেমি।

ভূমিকম্প পরিমাপ করার যন্ত্রের নাম সিসমোগ্রাফ। এটি উদ্ভাবন করেন চার্লস ফান্সিস রিক্টার। তার নামানুসারে স্কেলটির নামকরণ করা হয় রিক্টার স্কেল। রিক্টার স্কেলে, ভূমিকম্পের মাত্রাকে R দ্বারা সূচিত করা হয়।

আদর্শ ভূমিকম্পের ক্ষেত্রে $I = S$. সুতরাং

আদর্শ ভূমিকম্পের মাত্রা, $R = \log\left(\frac{S}{S}\right) = log 1 = 0$

সুতরাং, $R = 0$ দ্বারা বোঝা যায়, সেই স্থানে আসলে কোনোরূপ ভূমিকম্প সংঘটিত হয়নি।

একটি পর্যবেক্ষণ

চলো একটি মজার বিষয় সম্পর্কে অবগত হই। তোমরা কি ভাবতে পার, রিক্টার স্কেলে 5 মাত্রার ভূমিকম্পের চেয়ে 6 মাত্রার ভূমিকম্প 10 গুণ বেশি শক্তিশালী। বিষয়টি বোঝার জন্য ধরি, 5 মাত্রার ভূমিকম্পের তীব্রতা I_5 এবং 6 মাত্রার ভূমিকম্পের তীব্রতা I_6, তাহলে

$$5 = \log_{10}\left(\frac{I_5}{S}\right) \text{ এবং } 6 = \log_{10}\left(\frac{I_6}{S}\right)$$

$$\therefore \frac{I_5}{S} = 10^5 \quad \text{এবং} \quad \frac{I_6}{S} = 10^6$$

$$\text{বা, } \frac{\frac{I_6}{S}}{\frac{I_5}{S}} = \frac{10^6}{10^5}$$

$$\text{বা, } \frac{I_6}{I_5} = 10$$

$\therefore I_6 = 10 \times I_5$

সুতরাং, আমরা দেখতে পাচ্ছি, 5 মাত্রার ভূমিকম্পের চেয়ে 6 মাত্রার ভূমিকম্প 10 গুণ বেশি শক্তিশালী।

জোড়ায় কাজ

দেখাও যে, 5 মাত্রার ভূমিকম্পের চেয়ে 7 মাত্রার ভূমিকম্প 100 গুণ বেশি শক্তিশালী। আবার, 5 মাত্রার ভূমিকম্পের চেয়ে 8 মাত্রার ভূমিকম্প 1000 গুণ বেশি শক্তিশালী।

রিক্টার স্কেলে মাত্রা 1 বৃদ্ধি পাওয়ার কারণে ভূমিকম্পের শক্তি বৃদ্ধি পায় 10 গুণ। মাত্রা 2 বা 3 বৃদ্ধি পাওয়ার কারণে ভূমিকম্পের শক্তি বৃদ্ধি পায় যথাক্রমে 100 বা 1000 গুণ। এমন পরিবর্তন কেনো হয় তা কি বলতে পার? আসলে এই মাত্রা 10 ভিত্তিক লগ ব্যবহার করে নির্ণয় করা হয় বলেই, এমন পরিবর্তন হয়।

সমস্যা: 2023 সালের 6 ফেব্রুয়ারি তুরস্কের দক্ষিণাংশে যে ভয়াবহ ভূমিকম্প সংঘটিত হয় রিক্টার স্কেলে তার মাত্রা 7.8 রেকর্ড করা হয়। প্রায় 9 ঘন্টা পর তুরস্কের দক্ষিণ-পশ্চিমাংশে আরও একটি ভূমিকম্প সংঘটিত হয় যার মাত্রা 7.5 রেকর্ড করা হয়। পূর্বের ভূমিকম্পটি পরবর্তী ভূমিকম্পের চেয়ে কতগুণ বেশি শক্তিশালী ছিল?

সমাধান: মনে করি,

I_1 = পূর্বের ভূমিকম্পের তীব্রতা, I_2 = পরবর্তী ভূমিকম্পের তীব্রতা এবং S = আদর্শ ভূমিকম্পের তীব্রতা।

সুতরাং, রিক্টার স্কেলে

পূর্বের ভূমিকম্পের মাত্রা = $\log_{10}\left(\frac{I_1}{S}\right)$ এবং পরবর্তী ভূমিকম্পের মাত্রা = $\log_{10}\left(\frac{I_2}{S}\right)$

প্রশ্নমতে,

$\log_{10}\left(\frac{I_1}{S}\right) = 7.8 \quad \ldots\ldots(1)$ এবং $\log_{10}\left(\frac{I_2}{S}\right) = 7.5 \quad \ldots\ldots(2)$

(1) নং থেকে (2) নং বিয়োগ করে পাই,

$$\log_{10}\left(\frac{I_1}{S}\right) - \log_{10}\left(\frac{I_2}{S}\right) = 7.8 - 7.5$$

বা, $(\log_{10}I_1 - \log_{10}s) - (\log_{10}I_2 - \log_{10}s) = 0.3$

বা, $\log_{10}I_1 - \log_{10}s - \log_{10}I_2 + \log_{10}s = 0.3$

বা, $\log_{10}I_1 - \log_{10}I_2 = 0.3$

বা, $\log_{10}(\frac{I_1}{I_2}) = 0.3$

এই লগারিদমীয় সম্পর্ককে সূচকের মাধ্যমে প্রকাশ করলে দাঁড়ায়,

$$10^{0.3} = \frac{I_1}{I_2}$$

বা, $\frac{I_1}{I_2} = 10^{0.3}$

বা, $\frac{I_1}{I_2} \approx 1.995262315$

$$\frac{I_1}{I_2} \approx 2$$

$\therefore I_1 \approx 2I_2$

সুতরাং, পূর্বের ভূমিকম্পটি পরবর্তী ভূমিকম্পের চেয়ে প্রায় দ্বিগুণ শক্তিশালী ছিল।

দলগত কাজ

সমস্যা ১: 1885 সালের 14 জুলাই মানিকগঞ্জে যে ভয়াবহ ভূমিকম্প সংঘটিত হয় রিক্টার স্কেলে তার মাত্রা 7.0 রেকর্ড করা হয়। 2003 সালের 27 জুলাই রাঙামাটির বরকল উপজেলায় যে ভূমিকম্প সংঘটিত হয় রিক্টার স্কেলে তার মাত্রা 5.1 রেকর্ড করা হয়। মানিকগঞ্জের ভূমিকম্পটি রাঙামাটির ভূমিকম্পের চেয়ে কতগুণ বেশি শক্তিশালী ছিল?

সমস্যা ২: গত শতাব্দীর প্রথমদিকে উত্তর আমেরিকার একটি স্থানের ভূমিকম্পের মাত্রা রেকর্ড করা হয়েছিল 8.3 এবং ওই একই বছরে দক্ষিণ আমেরিকার একটি স্থানের ভূমিকম্পের মাত্রা রেকর্ড করা হয়েছিল যা উত্তর আমেরিকার ভূমিকম্পের তীব্রতার চেয়ে চারগুণ বেশি শক্তিশালী। দক্ষিণ আমেরিকার ভূমিকম্পের মাত্রা কত ছিল?

লগারিদম ব্যবহার করে শব্দের মাত্রা পরিমাপ

শব্দের মাত্রা পরিমাপ করতে লগারিদম ব্যবহার করা হয়। সাধারণত ডেসিবেল এককে শব্দের মাত্রা পরিমাপ করা হয়।

শব্দের মাত্রা,

$$d = 10\log_{10}(\frac{I}{S})$$

যেখানে, I = ওয়াটে প্রকাশিত প্রতি বর্গমিটারে শব্দের সর্বোচ্চ তীব্রতা।

S = ওয়াটে প্রকাশিত প্রতি বর্গমিটারে শব্দের সর্বনিম্ন তীব্রতা যার কমে মানুষ শুনতে পায় না।

$S = 10^{-12} w/m^2$.

উদাহরণ ১: একটি শব্দযন্ত্র থেকে প্রতিনিয়ত $2.30 \times 10^2 w/m^2$ মাত্রার শব্দ বের হচ্ছে। সেই স্থানে অবস্থিত মানুষের কানে কত ডেসিবেলে ওই শব্দ পৌঁছাবে?

সমাধান: আমরা জানি, শব্দের মাত্রা, $d = 10\log_{10}\left(\frac{I}{S}\right)$

এখানে, $I = 2.30 \times 10^2 w/m^2$

এবং $S = 10^{-12} w/m^2$

$$\therefore d = 10\log_{10}\left(\frac{2.30 \times 10^2 w/m^2}{10^{-12} w/m^2}\right)$$

$$= 10\log_{10}\left(\frac{2.30 \times 10^2}{10^{-12}}\right)$$

$$= 10\log_{10}(2.30 \times 10^{2+12})$$

$$= 10\log_{10}(2.30 \times 10^{14})$$

$$= 10(\log_{10}2.30 + \log_{10}10^{14})$$

$$= 10(\log_{10}2.30 + 14\log_{10}10)$$

$$\approx 10(0.3617278 + 14 \times 1)$$

$$= 10(0.3617278 + 14)$$

$$= 10 \times 14.3617278$$

$$= 143.617278$$

$$\approx 144$$

$\therefore$ শব্দের মাত্রা 144 ডেসিবেল (প্রায়)।

জোড়ায় কাজ

সমস্যা ৩: একটি ইট ভাঙার মেশিন থেকে প্রতিনিয়ত $3.14 \times 10^3\ w/m^2$ মাত্রার শব্দ বের হচ্ছে। সেই স্থানে ইট ভাঙার শ্রমিকের কানে কত ডেসিবেলে ওই শব্দ পৌঁছায়?

উদাহরণ ২: কোনো একটি উৎস থেকে শব্দের মাত্রা প্রতি বর্গমিটারে $4.0 \times 10^{-5} w$ হলে ওই শব্দকে ডেসিবেলে প্রকাশ করলে কত হবে?

সমাধান: আমরা জানি, শব্দের মাত্রা, $d = 10\log_{10}\left(\frac{I}{S}\right)$

এখানে $I = 4.0 \times 10^{-5} w/m^2$

এবং $S = 10^{-12}\ w/m^2$

$\therefore \text{d} = 10 \log_{10}(\frac{4.0 \times 10^{-5} w/m^2}{10^{-12}\ w/m^2})$

$= 10 \log_{10}(\frac{4.0 \times 10^{-5}}{10^{-12}})$

$= 10 \log_{10}(4.0 \times 10^{-5+12}$

$= 10 \log_{10}(4 \times 10^7)$

$= 10(\log_{10}4 + \log_{10}10^7)$

$= 10(\log_{10}4 + 7 \log_{10}10)$

$\approx 10(0.60206 + 7 \times 1)$

$= 10(0.60206 + 7)$

$= 10(7.60206)$

$= 76.0206 \approx 76$

$\therefore$ শব্দের মাত্রা 76 ডেসিবেল (প্রায়)।

একক কাজ

সমস্যা ৪: একটি ইঞ্জিন চালিত অটোরিক্সা থেকে শব্দের মাত্রা প্রতি বর্গমিটারে $2.35 \times 10^{-6} w$ বের হচ্ছে। অটোরিক্সাতে বসা অবস্থায় তোমার কানে কত ডেসিবেলে ওই শব্দ পৌঁছাবে?

উদাহরণ ৩: একটি গরম পানির পাম্প থেকে 50 ডেসিবেলের শব্দ নির্গত হচ্ছে। অন্যদিকে একটি সেচ পাম্প থেকে 62 ডেসিবেলের শব্দ নির্গত হচ্ছে। সেচ পাম্পের শব্দের তীব্রতা গরম পানির পাম্পের শব্দের তীব্রতা থেকে কতগুণ বেশি?

সমাধান: আমরা জানি, শব্দের মাত্রা,

$d = 10 \log_{10}(\frac{I}{S})$, এখানে $d = 50$

মনে করি, গরম পানির পাম্পের ক্ষেত্রে,

শব্দের তীব্রতা $I = h$

সুতরাং $50 = 10\log_{10}\left(\frac{h}{S}\right)$

উভয় পক্ষকে 10 দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$5 = \log_{10}\left(\frac{h}{S}\right)$$

বা, $\frac{h}{S} = 10^5$

$\therefore h = 10^5 \times S\ldots\ldots\ldots(1)$

ধরি, সেচ পাম্পের ক্ষেত্রে, শব্দের তীব্রতা $I = w$

$\therefore 62 = 10\log_{10}\left(\frac{w}{S}\right)$

উভয় পক্ষকে 10 দ্বারা ভাগ করে পাই,

$6.2 = \log10\left(\frac{w}{S}\right)$

বা, $\frac{w}{S} = 10^{6.2}$

$\therefore w = 10^{6.2} \times S\ldots\ldots\ldots(2)$

(1) ও (2) নং হতে পাই,

$\frac{w}{h} = \frac{10^{6.2} \times \mathrm{S}}{10^5 \times \mathrm{S}}$

বা, $\frac{w}{h} = 10^{6.2-5}$

বা, $\frac{w}{h} = 10^{1.2}$

বা, $\frac{w}{h} \approx 15.85$

$\therefore w \approx 15.85 \times h$

সুতরাং, সেচ পাম্পের শব্দের তীব্রতা গরম পানির পাম্পের শব্দের তীব্রতার 15.85 গুণ প্রায়।

অনুশীলনী

1. বিভিন্ন সূত্র ব্যবহার করে মান নির্ণয় করো:

   (i) $2\sqrt[3]{343} + 2\sqrt[5]{243} - 12\sqrt[6]{64}$ (ii) $\frac{y^{a+b}}{y^{2c}} \times \frac{y^{b+c}}{y^{2a}} \times \frac{y^{c+a}}{y^{2b}}$

2. বিভিন্ন সূত্র ব্যবহার করে প্রমাণ করো যে, $\left(\frac{z^a}{z^b}\right)^{a+b-c} \times \left(\frac{z^b}{z^c}\right)^{b+c-a} \times \left(\frac{z^c}{z^a}\right)^{c+a-b}$

3. নিচের সূচক সমতাকে লগের মাধ্যমে প্রকাশ করো এবং বৈজ্ঞানিক ডিভাইস ব্যবহার করে x এর মান বের করো।

   (ii) $2^x = 64$ (ii) $(1.2)^x = 100$ (iii) $7^x = 5$ (iv) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 7$

4. 10% চক্রবৃদ্ধি মুনাফা হারে চক্রবৃদ্ধি মূলধন কত বছরে 3 গুণ হবে?

5. করোনা ভাইরাসের নাম তোমরা সবাই জানো। এই ভাইরাস দ্রুত ছড়ায়। যদি করোনা ভাইরাস 1 জনের থেকে প্রতিদিন 3 জনে ছড়ায়, তবে 1 জন থেকে 1 মাসে মোট কতোজন করোনা ভাইরাসে আক্রান্ত হবে? কতোদিনে 1 কোটি মানুষ আক্রান্ত হবে?

6. সেতুর চাচার 3 বিঘা জমি আছে। তিনি তাঁর জমির উর্বরতা ঠিক রাখার জন্য প্রতিবছর 30 কেজি জৈব সার প্রয়োগ করেন। প্রতি কেজি সারে যদি প্রতি কাঠা জমির উর্বরতা 3% বৃদ্ধি করে, তবে সেতুর চাচার জমির অবচয় বের করো? তিনি যদি জমিতে সার প্রয়োগ না করতেন, তাহলে কত বছর পরে তাঁর জমিতে আর কোনো ফসল হবে না?

7. 1918 সালের 8 জুলাই মৌলভীবাজারের শ্রীমঙ্গলে যে ভয়াবহ ভূমিকম্প সংঘটিত হয় রিক্টার স্কেলে তার মাত্রা 7.6 এবং 1997 সালের 22 নভেম্বর চট্টগ্রামে যে ভূমিকম্প সংঘটিত হয় যার মাত্রা 6.0 রেকর্ড করা হয়। শ্রীমঙ্গালের ভূমিকম্পটি চট্টগ্রামের ভূমিকম্পের চেয়ে কতগুণ বেশি শক্তিশালী ছিল?

8. কোনো এক সময় জাপানে একটি ভূমিকম্প সংঘটিত হয়, রিক্টার স্কেলে যার মাত্রা 8 রেকর্ড করা হয়। ওই একই বছরে সেখানে আরও একটি ভূমিকম্প সংঘটিত হয় যা পূর্বের চেয়ে 6 গুণ বেশি শক্তিশালী। রিক্টার স্কেলে পরবর্তী ভূমিকম্পের মাত্রা কত ছিল?

9. 1999 সালের জুলাই মাসে কক্সবাজারের মহেশখালিতে যে ভূমিকম্প হয় তার মাত্রা রেকর্ড করা হয়েছিল 5.2 এবং 2023 সালের 6 ফেব্রুয়ারি তুরস্কের দক্ষিণাংশে যে ভয়াবহ ভূমিকম্প সংঘটিত হয় তা মহেশখালির ভূমিকম্পের তীব্রতার চেয়ে 398 গুণ বেশি শক্তিশালী ছিল। তুরস্কের দক্ষিণাংশের ভূমিকম্পের মাত্রা কত ছিল?

প্রকৃতি ও প্রযুক্তিতে বহুপদী রাশি

এই অভিজ্ঞতায় শিখতে পারবে-

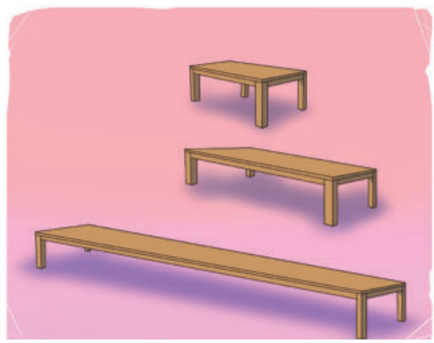
- বহুপদী রাশির গঠন প্রক্রিয়া।
- বহুপদী রাশির যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ ।
- বহুপদী রাশির উৎপাদকে বিশ্লেষণের পদ্ধতি ।
- উৎপাদক উপপাদ্য।
- পূর্ণবর্গ রাশির উৎপাদক।
- ঘনরাশির যোগফলের ও বিয়োগফলের উৎপাদক।
- আংশিক ভগ্নাংশে পরিবর্তনের বিভিন্ন পদ্ধতি।

প্রকৃতি ও প্রযুক্তিতে বহুপদী রাশি

প্রাকৃতিক সৃষ্টি এক গভীর রহস্যে ঘেরা। প্রকৃতির এই সৃষ্টিকে নিবিড়ভাবে পর্যবেক্ষণ করে মানুষ তাঁর ক্ষুদ্র জ্ঞানকে বৃদ্ধি করার চেষ্টা করে। হয়ে উঠে বিজ্ঞানী। বিজ্ঞানীগণ তাদের অর্জিত জ্ঞানকে কাজে লাগিয়ে নিজেদের প্রয়োজনে কত কিছু আবিষ্কার করে। মানুষ গবেষণা করে দেখেছে যে, পাহাড় সৃষ্টি হয়েছে পৃথিবীর ভারসাম্যতার প্রয়োজনে। তাঁদের এই অর্জিত জ্ঞানকে প্রযুক্তিতে কাজে লাগিয়ে প্রযুক্তিবিদরা তৈরি করছে টেকসই স্থাপনা। আমরা এই শিখন প্রক্রিয়ায় খোজার চেষ্টা করব, সৃষ্টির কোথায় কীভাবে লুকিয়ে আছে বহুপদী রাশির গাণিতিক মডেল এবং প্রযুক্তিতে সেগুলোকে ব্যবহারের জন্য গাণিতিক নিয়ম।

বহুপদী রাশি একটি বীজগাণিতিক রাশি। সংখ্যারাশির সমস্যাকে যে কোনো সংখ্যার ক্ষেত্রে সমাধানের জন্য চলকের মাধ্যমে বীজগাণিতিক রাশিতে রূপান্তর করা হয়। পরে বীজগাণিতিক নিয়ম ব্যবহার করে সমস্যাটির সমাধান করে যে কোনো সংখ্যার জন্য ব্যবহার করা হয়। এসো আমরা প্রথমে জেনে নেই বাস্তব সমস্যা থেকে কীভাবে বহুপদী রাশি গঠন করা যায়।

১. বাস্তব সমস্যা থেকে বহুপদী রাশির গঠন



মিনহাজের বাবা একজন কাঠমিস্ত্রিকে তিনটি টেবিল তৈরির অর্ডার দিলেন। একটি মিনহাজের পড়ার টেবিল, একটি তাঁদের খাবার টেবিল এবং একটি মিনহাজের ছোটো বোনের খেলনা রাখার জন্য। কাঠমিস্ত্রি জিজ্ঞেস করলেন টেবিল তিনটি কোন মাপের হবে? মিনহাজের বাবা টেবিলের মাপ সম্বন্ধে মিনহাজের মতামত জানতে চাইলেন। মিনহাজ নবম শ্রেণির ছাত্র। আঁকার সম্বন্ধে তাঁর কিছু ধারণা আছে। সে কাঠমিস্ত্রিকে বলল, তাঁর ছোটো বোনের টেবিলের দৈর্ঘ্য হবে প্রস্থের দ্বিগুণের চেয়ে 1 একক কম। তাঁর নিজের টেবিলের দৈর্ঘ্য হবে প্রস্থের বর্গের চেয়ে 1 একক বেশি এবং খাবার টেবিলের দৈর্ঘ্য হবে প্রস্থের ঘন এর থেকে প্রস্থের দ্বিগুণ বাদ দিয়ে 1 একক বেশি। তাহলে, প্রতিটি টেবিলের প্রস্থ x হলে,

মিনহাজের ছোটো বোনের টেবিলের দৈর্ঘ্য $= 2x - 1$

একক কাজ

মিনহাজের পড়ার টেবিল এবং মিনহাজদের খাবার টেবিলের দৈর্ঘ্য x এর মাধ্যমে প্রকাশ করো।

উপরে দৈর্ঘ্য পরিমাপের জন্য চলক x এর মাধ্যমে যে রাশিগুলো পাওয়া গেল, এগুলো বহুপদী রাশি।

২. বহুপদী রাশি (Polynomial Expression)

তোমরা পূর্বের শ্রেণিতে বীজগাণিতিক রাশির চলক, পদ, ইত্যাদি সম্বন্ধে জেনেছ। বীজগাণিতিক রাশির **চলক** হলো একটি প্রতীক যা যে কোনো সংখ্যারাশিকে নির্দেশ করে। চলকের মাধ্যমে আমরা সংখ্যারাশিকে বীজগাণিতিক রাশিতে রূপান্তর করতে পারি। চলক যখন কোনো নির্দিষ্ট সংখ্যা নির্দেশ করে তখন তাকে **ধ্রুবক** (constant) বলে। এক বা একাধিক চলক এবং ধ্রুবক গুণফলই বীজগাণিতিক রাশির এক একটি **পদ** (term)। এক বা একাধিক পদবিশিষ্ট বীজগাণিতিক রাশিকে **বহুপদী** (polynomial) বলে। একটি বহুপদী রাশির প্রত্যেকটি পদের চলকের সূচকের সমষ্টিকে ওই **পদের মাত্রা** (degree of term) বলে। যে পদের মাত্রা 0 তাকে **ধ্রুবপদ** (Constant term) বলে। পদসমূহের গরিষ্ঠ মাত্রাকে ওই **বহুপদী রাশির মাত্রা** (degree of polynomial) বলে।

উদাহরণ-১:

$5x - 3$ একটি এক চলকবিশিষ্ট দ্বিপদী রাশি। এখানে, -3 একটি পদ এবং এর মাত্রা 0. অর্থাৎ -3 একটি ধ্রুবপদ। আবার $5x$ একটি পদ এবং এর মাত্রা 1 এবং 5 কে x এর **সহগ** বলে।

উদাহরণ-২:

$xy - 5x + y$ একটি দুই চলকবিশিষ্ট ত্রিপদী রাশি। এখানে দুইটি চলক x ও y এবং 3 টি পদ রয়েছে। xy একটি পদ এবং এর সহগ 1.

একক কাজ

চলকের সংখ্যা এবং পদসংখ্যা উল্লেখপূর্বক 5টি বহুপদী রাশি লেখো। প্রত্যেকটি রাশির ধ্রুবপদ এবং প্রত্যেক পদের সহগ বের করো।

৩. এক চলকবিশিষ্ট বহুপদী রাশি

এখানে আমরা একটি চলক xবিশিষ্ট বহুপদী নিয়ে আলোচনা করব। যেমন-

১. $3,\quad 2x,\quad -x^2,\quad x^4$ ইত্যাদি x চলকবিশিষ্ট একপদী রাশি।

২. $1 + 2x,\quad -2 + x^4$ ইত্যাদি x চলকবিশিষ্ট দ্বিপদী রাশি।

এবার আমরা বহুপদী রাশির সাধারণ আকার আলোচনা করব। এক চলকবিশিষ্ট বহুপদী রাশির সাধারণ আকার হলো-

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0$$

একে $p(x)$ দ্বারা নির্দেশ করে পাই,

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0$$

এখানে,

- $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$ বাস্তব সংখ্যা।
- n অঋণাত্মক (শূন্য অথবা ধনাত্মক) পূর্ণসংখ্যা। একে $p(x)$ এর মাত্রা বা ঘাত (degree) বলে।
- $n = 0$ হলে, $p(x) = a_0$, একটি ধ্রুবক রাশি।
- $p(x) = 0$ কে শূন্য বহুপদী হিসাবে চিহ্নিত করা যায় ।
- $p(x)$ বহুপদী রাশিতে r এর যে কোনো মানের জন্য $a_r x^r$ এক একটি পদ। অর্থাৎ $a_1 x$ একটি পদ, $a_2 x^2$ একটি পদ, ইত্যাদি। এখানে a_0 একটি পদ, একে ধ্রুবপদ (constant term) বলে।
- প্রত্যেক n এর জন্য a_nকে x^n এর সহগ (coefficient) বলে। অর্থাৎ a_1, x এর সহগ, a_2, x^2 এর সহগ, ইত্যাদি।
- $a_n x^n$ কে মুখ্যপদ এবং a_n কে মুখ্যসহগ বলে।

একক কাজ

$p(x) = 2x^2 - 3x + 1$ রাশিটির মাত্রা, ধ্রুবপদ, মুখ্যপদ, মুখ্যসহগ এবং x এর সহগ কত?

চলক x এর যে কোনো নির্দিষ্ট মান a এর জন্য $p(x)$ এর যে মান পাওয়া যায় তাকে $p(a)$ দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

একক কাজ

যদি $p(x) = 5x^3 - 3x + 1$ হয়, তবে $p(0)$, $p(1)$, $p(-1)$, $p(2)$ এবং $p(\frac{1}{2})$ এর মান বের করো।

দলগত কাজ

সকল শিক্ষার্থী ৪টি দলে ভাগ হয়ে প্রত্যেক দলে নিচের এক একটি কাজ করো এবং অপর দলের কাজ মূল্যায়ন করে শ্রেণি শিক্ষকের কাছে জমা দাও।

১. এক চলকবিশিষ্ট বিভিন্ন পদসংখ্যার একঘাত বহুপদী রাশি লেখো। সর্বাধিক কয়টি লিখতে পেরেছ?

২. এক চলকবিশিষ্ট বিভিন্ন পদসংখ্যার দ্বিঘাত বহুপদী রাশি লেখো। সর্বাধিক কয়টি লিখতে পেরেছ?

৩. এক চলকবিশিষ্ট বিভিন্ন পদসংখ্যার ত্রিঘাত বহুপদী রাশি লেখো। সর্বাধিক কয়টি লিখতে পেরেছ?

৪. এক চলকবিশিষ্ট বিভিন্ন পদসংখ্যার চতুর্ঘাত বহুপদী রাশি লেখো। সর্বাধিক কয়টি লিখতে পেরেছ?

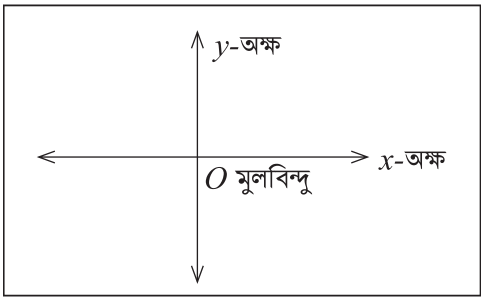
উপরের রাশিগুলো পর্যবেক্ষণ করে এক চলকবিশিষ্ট বহুপদী রাশির মাত্রা ও পদসংখ্যার মধ্যে কোনো সম্পর্ক খুঁজে পাও কী? খুঁজে পেলে নিচে লিখে রাখো।

৪. এক চলকবিশিষ্ট বহুপদী রাশির গ্রাফ

কোনো গাণিতিক সমস্যাকে জ্যামিতিক আকারে রূপ দেওয়া গেলে সমস্যাটিকে পর্যবেক্ষণ করা সহজ হয়। এক চলকবিশিষ্ট বহুপদী রাশিকে আমরা গ্রাফের মাধ্যমে জ্যামিতিক রূপে প্রকাশ করতে পারি। চলকের বিভিন্ন মানের জন্য বহুপদী রাশির বিভিন্ন মান পাওয়া যায়। চলক এবং বহুপদী রাশির মান দ্বিমাত্রিক স্থানাঙ্ক জ্যামিতির মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়। দ্বিমাত্রিক স্থানাঙ্ক জ্যামিতিতে প্রকাশিত এই আঁকারকে **বহুপদী রাশির গ্রাফ (graph of polynomial)** বলে। সুতরাং গ্রাফ আঁকার জন্য আমাদের প্রথমে দ্বিমাত্রিক স্থানাঙ্ক জ্যামিতির বিষয়ে জানা প্রয়োজন।

৪.১ দ্বিমাত্রিক স্থানাঙ্ক জ্যামিতি

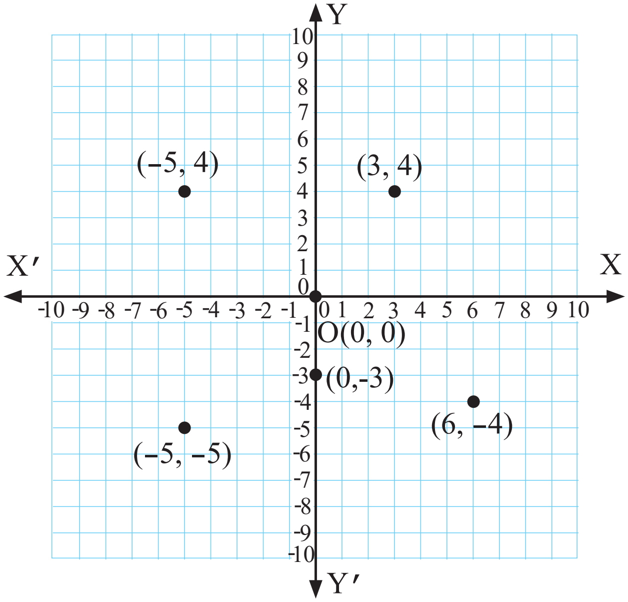
দ্বিমাত্রিক স্থানাঙ্ক জ্যামিতিতে একটি সমতলে আনুভূমিকভাবে একটি সংখ্যারেখা এবং উল্লম্বভাবে আরেকটি সংখ্যারেখা স্থাপন করা হয়। আনুভূমিক সংখ্যারেখাকে x-অক্ষ (x-axis), এবং উল্লম্ব সংখ্যারেখাটিকে y-অক্ষ (y-axis) বলে এবং সমতলটিকে xy-সমতল বলে। x-অক্ষ ও y-অক্ষ পরস্পর যে বিন্দুতে ছেদ করে, তাকে মূলবিন্দু (origin) বলে। মূলবিন্দুকে O দ্বারা নির্দেশ করা হয়।



৪.২ xy-সমতলে কোনো বিন্দুর অবস্থান

xy সমতলে কোনো বিন্দুর অবস্থানকে (a, b) দ্বারা প্রকাশ করা হয়, যেখানে a সংখ্যাটি x-অক্ষ থেকে এবং b সংখ্যাটি y-অক্ষ থেকে নেয়া হয়। এখানে a কে ভুজ (abscissa) এবং b কে কোটি (ordinate) বলে। মূলবিন্দু থেকে x-অক্ষের ডান দিকের সংখ্যা ধনাত্মক এবং বামদিকের সংখ্যা ঋণাত্মক। একইভাবে মূলবিন্দু থেকে y-অক্ষের উপরের দিকের সংখ্যা ধনাত্মক এবং নিচের দিকের সংখ্যা ঋণাত্মক। সুতরাং আমরা xy সমতলের যে কোনো বিন্দুকে x-অক্ষ এবং y-অক্ষের সংখ্যার মাধ্যমে প্রকাশ করতে পারি। (a, b) বিন্দুটি xy-সমতলে উপস্থাপন করতে হলে প্রথমে মূলবিন্দু থেকে x-অক্ষের ধনাত্মক দিকে a একক যাওয়ার পরে y-অক্ষের সমান্তরালে b একক উপরের দিকে গেলে যে বিন্দুটি পাওয়া যাবে, সেটিই xy সমতলে (a, b) বিন্দুটির অবস্থান।

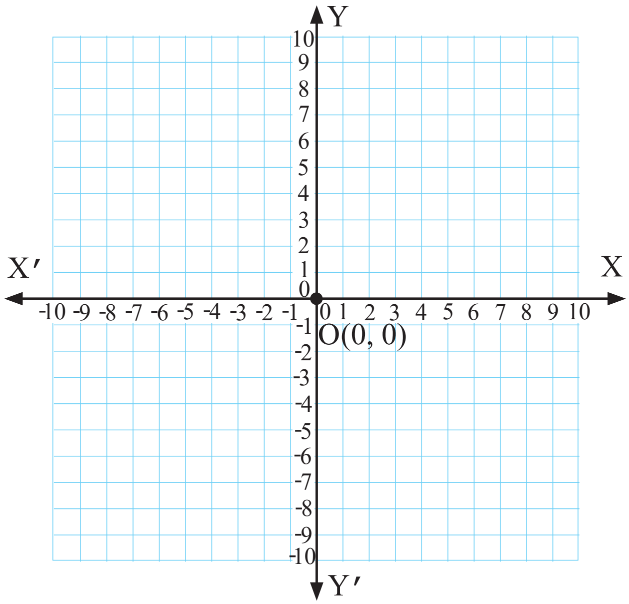
উদাহারণ: (3, 4) বিন্দুটি xy-সমতলে উপস্থাপন করতে হলে প্রথমে মূলবিন্দু থেকে x-অক্ষের ধনাত্মক দিকে 3 একক যাওয়ার পরে y-অক্ষের সমান্তরালে 4 একক উপরের দিকে গেলে যে বিন্দুটি পাওয়া যাবে, সেটিই xy-সমতলে (3, 4) বিন্দুটির অবস্থান। মূলবিন্দুর অবস্থানকে (0, 0) দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এভাবে xy সমতলে যে কোনো বিন্দুর অবস্থানকে x-অক্ষ এবং y-অক্ষের সাপেক্ষে নির্দেশ করা যায়। পাশের চিত্রে (0, 0), (3, 4), (−5, 4), (−5, −5) এবং (6, −4) বিন্দুর অবস্থান দেখানো হয়েছে।



জোড়ায় কাজ

নিচের বিন্দুগুলোকে পাশের xy-সমতলে উপস্থাপন করো।

(3, 0), (1, 2), (0, 4), (−3, 5), (−6, 0),
(−4, −5), (0, −3), (4, −2)



৪.৩ এক চলকবিশিষ্ট বহুপদী রাশির গ্রাফ আঁকার পদ্ধতি

ধরি, $p(x)$ একটি বহুপদী রাশি। x এর বিভিন্ন মানের জন্য $p(x)$ এর মান বের করতে হবে। ধরি x এর মান a, তাহলে $p(x)$ এর মান হবে $p(a)$. সুতরাং $(a,p(a))$ বিন্দুটি xy-সমতলে $p(x)$ বহুপদী রাশির লেখের উপর অবস্থিত হবে। এইভাবে x এর কয়েকটি মানের জন্য $p(x)$ এর মান বের করে x এবং $p(x)$ এর মানের সাপেক্ষে তৈরিকৃত বিন্দুগুলো xy-সমতলে স্থাপন করে ওই বিন্দুগুলোর মধ্য দিয়ে একটি মসৃন (smooth) রেখা আঁকলে সেটিই হবে $p(x)$ বহুপদী রাশির গ্রাফ।

👉 কোনো বহুপদী রাশির গ্রাফ আঁকা সহজ নয় এবং অনেক ক্ষেত্রে প্রায় অসম্ভব। উপরের শ্রেণিতে তোমরা বিভিন্ন গ্রাফ আঁকার কৌশল শিখবে। তবে আমাদের জন্য সৌভাগ্যের বিষয় হলো, আমরা বৈজ্ঞানিক যন্ত্রপাতির যুগে বাস করছি। আমরা বৈজ্ঞানিক যন্ত্রপাতি যেমন- গ্রাফিক্স ক্যালকুলেটর, কম্পিউটার, এমনকি

মোবাইল ফোনের মাধ্যমে বহুপদী রাশির গ্রাফ আঁকতে পারি। তোমরা কি জানো এই সকল বৈজ্ঞানিক যন্ত্রপাতি কীভাবে গ্রাফ আঁকে? এই সকল বৈজ্ঞানিক যন্ত্রপাতির মধ্যে মানুষ গ্রাফ আঁকার একটি মৌলিক পদ্ধতির প্রোগ্রাম সেট করে রেখেছে যার মাধ্যমে যন্ত্রটি নিমিষেই অসংখ্য বিন্দুকে স্থাপন করে মসৃন রেখা তৈরি করে ফেলতে পারে। তোমরাও বড়ো হয়ে তোমাদের মেধাকে কাজে লাগিয়ে মানুষের জন্য অনেক কাজকে সহজ করে দিবে। এখানে আমরা ছোটো ছোটো ঘাতবিশিষ্ট বহুপদী রাশির গ্রাফ আঁকার বিষয় নিয়ে আলোচনা করব। সুতরাং বহুপদী রাশির সহগগুলোতে আমরা a, b, c ইত্যাদি বর্ণ ব্যবহার করব।

৪.৪ একঘাত বহুপদী রাশির গ্রাফ

একঘাত বহুপদী রাশির সাধারণ আকার হলো-

$$p(x) = ax + b, \qquad a \neq 0$$

একঘাত বহুপদী রাশির গ্রাফ আঁকা সহজ কারণ, এটি একটি সরলরেখা নির্দেশ করে। যেহেতু কোনো সরলরেখার উপর যে কোনো দুইটি বিন্দু ওই সরলরেখাকে নির্দেশ করে, সুতরাং একটি একঘাত বহুপদী রাশি $p(x)$ এর গ্রাফ আঁকার জন্য দুইটি বিন্দু বের করলেই যথেষ্ট। এখানে x এর দুইটি মানের জন্য $p(x)$ এর দুইটি মান বের করে x এবং $p(x)$ এর মানের সাপেক্ষে তৈরিকৃত বিন্দু দুইটি xy-সমতলে স্থাপন করে ওই বিন্দু দুইটির মধ্য দিয়ে একটি সরলরেখা আঁকলে সেটিই হবে $p(x)$ বহুপদী রাশির গ্রাফ।

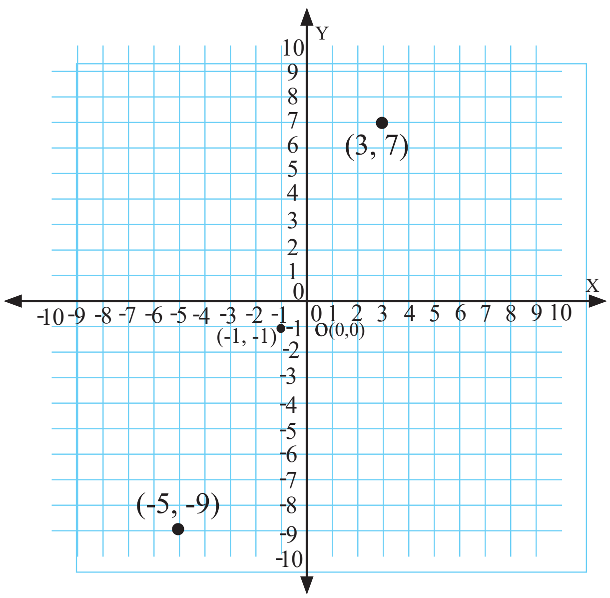
উদাহরণ: $p(x) = 2x + 1$ এর গ্রাফ আঁক।

সমাধান: ধরি, $y = p(x) = 2x + 1.$

এখন x এর দুইটি মানের জন্য y এর দুইটি মান নির্ণয় করে নিচের ছকটি পূরণ করি।

x	-3	0
y	-5	1
(x, y)	$(-3, -5)$	$(0, 1)$

উপরের ছকে প্রাপ্ত (x, y) বিন্দুগুলো পার্শ্বে দেওয়া গ্রাফপেপারে উপস্থাপন করো। তোমাদের বোঝার সুবিধার্থে তিনটি বিন্দু চিহ্নিত করা হয়েছে। এখানে যে কোনো দুইটি বিন্দু নিলেও হবে। এবার বিন্দুগুলো পরস্পর সংযোগ করো। কী দেখতে পাও? একটি সরল রেখা দেখতে পাবে। অর্থাৎ, আমরা বুঝতে পারছি $2x + 1$ একঘাতবিশিষ্ট বহুপদী রাশিটি একটি সরলরেখা নির্দেশ করে।



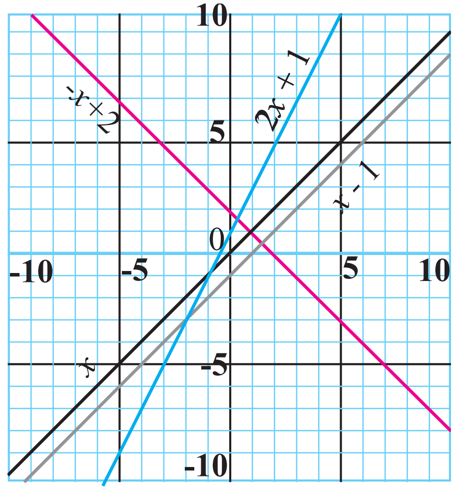
শিক্ষাবর্ষ ২০২৪

জোড়ায় কাজ

নিচের একঘাত বহুপদী রাশিগুলোকে গ্রাফপেপারে উপস্থাপন করো।

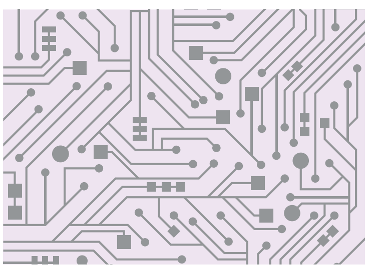
১) $x - 1$,　　২) x,　　৩) $-x + 2$

তোমার গ্রাফপেপারে উপস্থাপিত এসকল একঘাত বহুপদী রাশিগুলোকে পাশের চিত্রের সাথে মিলিয়ে নাও। তোমার কাছে থাকা বৈজ্ঞানিক যন্ত্রের মাধমে গ্রাফ একেও তুমি তোমার গ্রাফপেপারে আঁকা গ্রাফকে মিলিয়ে নিতে পার। যদি না মিলে, তবে তোমার বিন্দুগুলো নির্ণয় বা উপস্থাপন ভুল হয়েছে। সেক্ষেত্রে তোমাকে প্রয়োজনীয় সংশোধন করে নিতে হবে।



৪.৫ প্রকৃতি এবং প্রযুক্তিতে একঘাত বহুপদী রাশি

একঘাত বহুপদী রাশির জ্যামিতিক আকারের সাথে প্রকৃতির অনেক বস্তুর আকারের মিল রয়েছে। বিভিন্ন গাছের পাতা দেখতে এরকম সরলরৈখিক। যেমন- নারিকেল, তাল, সুপারি ইত্যাদি গাছের পাতা। লক্ষ করে দেখো, এই পাতাগুলো সুবিন্যস্তভাবে সাজানো রয়েছে। একটির সাথে অন্যটি ছেদ করেনি। এই ধরনের প্রাকৃতিক সরলরৈখিক বস্তুর বৈশিষ্ট্য বোঝার জন্য আমাদের একঘাত বহুপদী রাশির বিভিন্ন বৈশিষ্ট জানা প্রয়োজন।



প্রযুক্তিতে অনেক সরলরেখার ব্যবহার আছে। তোমার ঘরের অনেক বস্তুই সরলরৈখিক জিনিস দিয়ে তৈরি। যেমন- চেয়ার, টেবিল, জানালা, দরজা, ইত্যাদি সরলরৈখিক কাঠ দিয়ে তৈরি। আবার জানালার রড সরলরৈখিক ডিজাইনের। আমাদের ব্যবহার করা বিভিন্ন ডিভাইসের সার্কিটের ডিজাইন সরলরৈখিক। এইসকল সরলবৈখিক বস্তুর গাণিতিক মডেল তৈরি করতেও একঘাত বহুপদী রাশির জ্ঞান প্রয়োগ করা হয়।

৪.৬ দ্বিঘাত বহুপদী রাশির গ্রাফ

দ্বিঘাত বহুপদী রাশির সাধারণ আকার হলো-

$$p(x) = ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0$$

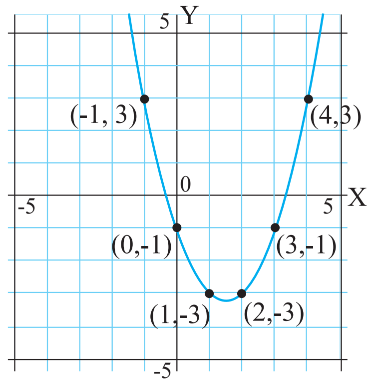
দ্বিঘাত বহুপদী রাশির গ্রাফ আঁকা একঘাত বহুপদী রাশির মতো সহজ নয়। কারণ, এটি সরলরেখা নির্দেশ করে না। সুতরাং একটি দ্বিঘাত বহুপদী রাশি $p(x)$ এর গ্রাফ আঁকার জন্য বেশ কয়েকটি বিন্দু বের করতে হবে। এখানে x এর মানগুলো নেওয়ার সময় খেয়াল রাখতে হবে যে, x এর কোন্ দুইটি ভিন্ন মানের জন্য $p(x)$ এর

মান সমান হয়। x এর কোনো মানের জন্য $p(x)$ এর মান 0 হলে x এর ওই সকল মানও বিবেচনা করতে হবে। x এর এরকম ভিন্ন মানের জন্য $p(x)$ এর মান বের করে x এবং $p(x)$ এর মানের সাপেক্ষে তৈরিকৃত বিন্দুগুলো xy-সমতলে স্থাপন করে ওই বিন্দুগুলোর মধ্য দিয়ে একটি মসৃন রেখা আঁকলে সেটিই হবে দ্বিঘাত বহুপদী রাশি $p(x)$ এর গ্রাফ। এক্ষেত্রে যত বেশি বিন্দু নেওয়া যাবে গ্রাফটি ততো বেশি মসৃণ হবে।

উদাহরণ: $p(x) = x^2 - 3x - 1$ এর গ্রাফ আঁক।

সমাধান: ধরি, $y = p(x) = x^2 - 3x - 1$. এখন নিচের ছকে x এর বিভিন্ন মানের জন্য y এর মান এবং (x, y) বিন্দুগুলো নির্ণয় করি।

x	-1	0	1	2	3	4
y	3	-1	-3	-3	-1	3
(x, y)	$(-1, 3)$	$(0, -1)$	$(1, -3)$	$(2, -3)$	$(3, -1)$	$(4, 3)$



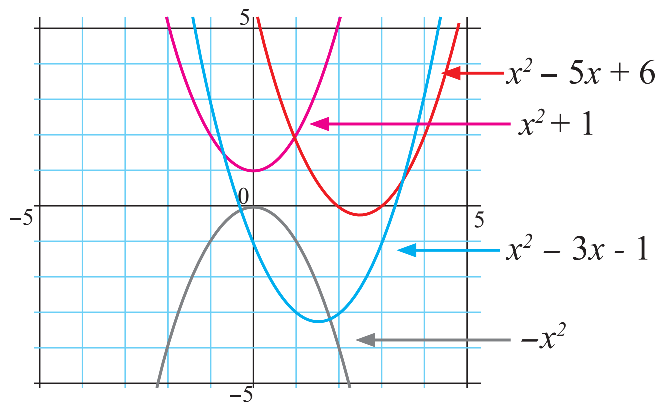
এখন, উপরের ছকে প্রাপ্ত (x, y) বিন্দুগুলো পার্শ্বে দেওয়া গ্রাফপেপারে উপস্থাপন করি। এবার বিন্দুগুলো দিয়ে গমনকারী একটি মসৃণ বক্ররেখা আঁকি। লক্ষ করো যে, x এর মান 1 ও 2 উভয়ের জন্য y এর মান $= -3$. সুতরাং মসৃণ বক্ররেখাটি x এর মান $\frac{1+2}{2} = 1.5$ অবস্থানে ঘুরে আসবে এবং পাশের চিত্রের মতো আমরা একটি বক্ররেখা পাব, যা $p(x) = x^2 - 3x - 1$ দ্বিঘাত বহুপদী রাশিকে নির্দেশ করে।

জোড়ায় কাজ

নিচের দ্বিঘাত বহুপদী রাশিগুলোকে গ্রাফপেপারে উপস্থাপন করো।

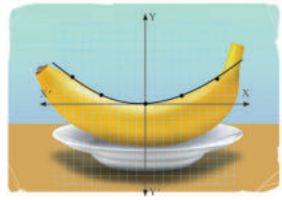
১) $x^2 - 5x + 6$, ২) $-x^2$, ৩) $x^2 + 1$

এই রাশিগুলো দ্বিঘাত বহুপদী রাশি। এগুলোর জ্যামিতিক আকার পার্শ্বের চিত্রের মতো। তোমার গ্রাফপেপারে উপস্থাপিত এসকল দ্বিঘাত বহুপদী রাশিগুলোকে পার্শ্বের চিত্রের সাথে মিলিয়ে নাও। তোমার কাছে থাকা বৈজ্ঞানিক যন্ত্রের মাধমে গ্রাফ একেও তুমি তোমার গ্রাফপেপারে আঁকা গ্রাফকে মিলিয়ে নিতে পার। যদি না মিলে, তবে তোমার বিন্দুগুলো নির্ণয় বা উপস্থাপন ভুল হয়েছে। সেক্ষেত্রে তোমরা প্রয়োজনীয় সংশোধন করে নাও।



৪.৭ প্রকৃতি এবং প্রযুক্তিতে দ্বিঘাত বহুপদী রাশি

প্রকৃতিতে পাহাড়ের চূড়ার আকার এবং কলার গঠনের আকার লক্ষ করো। এসকল আকারের সাথে দ্বিঘাত বহুপদী রাশির আকারের সামঞ্জস্য রয়েছে। এই ধরনের প্রাকৃতিক আকারকে দ্বিঘাত বহুপদী রাশি দ্বারা প্রকাশ করা যায়। এই ধরনের প্রাকৃতিক বস্তুর বৈশিষ্ট্য বোঝার জন্য আমাদের দ্বিঘাত বহুপদী রাশির বিভিন্ন বৈশিষ্ট্য জানা প্রয়োজন।



প্রযুক্তিতেও আমরা দ্বিঘাত বহুপদী রাশির আকারের মতো অনেক বস্তু দেখতে পাই। যেমন, ব্রিজ, বাড়ির গেট, ইত্যাদিতে। দ্বিমাত্রিক গাণিতিক মডেল ব্যবহার করে প্রযুক্তিতে এই ধরনের মজবুত স্থাপনা তৈরি করা হয়। এইসকল গাণিতিক মডেল তৈরি করতেও দ্বিঘাত বহুপদী রাশির জ্ঞান প্রয়োগ করা হয়।

একক কাজ

দ্বিঘাত বহুপদী রাশির 5টি উদাহরণ দাও। তোমার উদাহরণসমূহের জ্যামিতিক আকার উপস্থাপন করো এবং প্রকৃতিতে এবং প্রযুক্তিতে কোথায় দেখতে পাওয়া যায় তা লেখো।

৪.৮ ত্রিঘাত বহুপদী রাশির গ্রাফ

ত্রিঘাত বহুপদী রাশির সাধারণ আকার হলো-

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \qquad a \neq 0$$

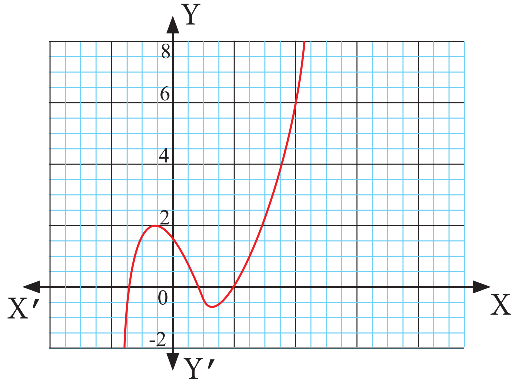
ত্রিঘাত বহুপদী রাশির গ্রাফ আঁকা বেশ কঠিন। এটি সরলরেখা নির্দেশ করে না। এ জন্য আমাদের ত্রিঘাত বহুপদী রাশির বৈশিষ্ট জানতে হয়। আমরা পরবর্তীতে এই ধরনের রাশির বৈশিষ্ট জানার মাধ্যমে গ্রাফ আঁকতে পারব। এখানে $p(x)$ এর গ্রাফ আঁকার জন্য x এর বেশ কয়েকটি মান নিব এবং x এর মানের সাপেক্ষে $p(x)$ মান বের করে $(x, p(x))$ বিন্দুগুলো বের করতে হবে। এখানে x এর কোনো মানের জন্য $p(x)$ এর মান o হলে x এর ওই সকল মান বিবেচনা করতে হবে। এখন x এবং $p(x)$ এর মানের সাপেক্ষে তৈরিকৃত বিন্দুগুলো xy-সমতলে স্থাপন করে ওই বিন্দুগুলোর মধ্য দিয়ে একটি মসৃন রেখা আঁকলে সেটিই হবে ত্রিঘাত বহুপদী রাশি $p(x)$ এর গ্রাফ।

উদাহরণ: $p(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$, এর গ্রাফ আঁক।

সমাধান: ধরি, $y = p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

এখন নিচের ছকে x এর বিভিন্ন মানের জন্য y এর মান এবং (x, y) বিন্দুগুলো নির্ণয় করি।

x	-1	0	1	2	3
y	0	2	0	0	8
(x, y)	$(-1, 0)$	$(0, 2)$	$(1, 0)$	$(2, 0)$	$(3, 8)$

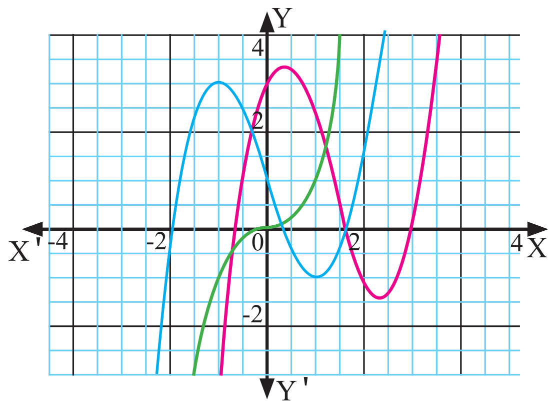


এখন, উপরের ছকে প্রাপ্ত (x, y) বিন্দুগুলো গ্রাফ পেপারে উপস্থাপন করো। এবার বিন্দুগুলো দিয়ে পাশের চিত্রের মতো একটি মসৃণ বক্ররেখা আঁকো। এই বক্ররেখাটিই $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ ত্রিঘাত বহুপদী রাশিকে নির্দেশ করে।

জোড়ায় কাজ

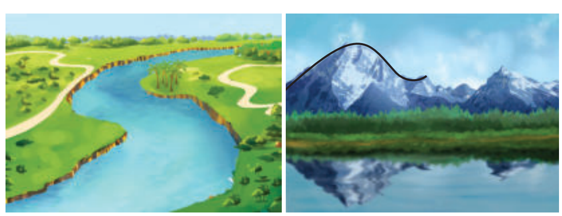
নিচের ত্রিঘাত বহুপদী রাশিগুলোকে গ্রাফপেপারে উপস্থাপন করো।

১) $x^3 - 4x^2 + 2x + 3$, ২) $x^3 - 3x + 1$, ৩) x^3



এই রাশিগুলো ত্রিঘাত বহুপদী রাশি। এগুলোর জ্যামিতিক আকার পাশের চিত্রের মতো। তোমার গ্রাফপেপারে উপস্থাপিত এসকল ত্রিঘাত বহুপদী রাশিগুলোকে পাশের চিত্রের সাথে মিলিয়ে নাও। কোন বহুপদী রাশির গ্রাফ কোনটি তা গ্রাফের পাশে লেখো। তোমার কাছে থাকা বৈজ্ঞানিক যন্ত্রের মাধমে গ্রাফ একেও তুমি তোমার গ্রাফপেপারে আঁকা গ্রাফকে মিলিয়ে নিতে পার। যদি না মিলে, তবে তোমার বিন্দুগুলো নির্ণয় বা উপস্থাপন ভুল হয়েছে। সেক্ষেত্রে তোমরা প্রয়োজনীয় সংশোধন করে নাও।

৪.৯ প্রকৃতি এবং প্রযুক্তিতে ত্রিঘাত বহুপদী রাশি



প্রকৃতিতে নদীর গতিপথ, পাশাপাশি পাহাড়ের চূড়াগুলোর উচ্চতা ইত্যাদির আকার, ত্রিঘাত বহুপদী রাশির আকারের সাথে সামঞ্জস্যপূর্ণ। এই ধরনের প্রাকৃতিক আকারকে ত্রিঘাত বহুপদী রাশি দ্বারা প্রকাশ করা যায়। এই ধরনের প্রাকৃতিক বস্তুর বৈশিষ্ট্য বোঝার জন্য আমাদের ত্রিঘাত বহুপদী রাশির বিভিন্ন বৈশিষ্ট জানা প্রয়োজন।

প্রযুক্তিতেও আমরা ত্রিঘাত বহুপদী রাশির আকারের মতো অনেক বস্তু দেখতে পাই। যেমন- বড়ো বড়ো ব্রিজ, বাড়ির গেট, ইত্যাদি। দ্বিমাত্রিক গাণিতিক মডেল ব্যবহার করে প্রযুক্তিতে এই ধরনের মজবুত স্থাপনা তৈরি করা হয়। ত্রিঘাত বহুপদী রাশির বৈশিষ্ট পর্যালোচনা করে বিভিন্ন প্রযুক্তি ব্যবহারের মাধ্যমে এই ধরনের স্থাপনা তৈরি করা হয় বলেই এগুলো মজবুত ও টিকসই হয়।

একক কাজ

ত্রিঘাত বহুপদী রাশির ৩টি উদাহরণ দাও। তোমার উদাহরণসমূহের জ্যামিতিক আকার উপস্থাপন করো এবং প্রকৃতিতে এবং প্রযুক্তিতে কোথায় দেখতে পাওয়া যায় তা লেখো।

৫. দুই চলকবিশিষ্ট বহুপদী (Polynomials of two variables)

বাস্তব সমস্যা - ১.

বাজারে বিভিন্ন মূল্যের চাল এবং ডাল পাওয়া যায়। চালের কেজি x টাকা এবং ডালের কেজি y টাকা হলে 6 কেজি চাল এবং 2 কেজি ডালের মূল্য কত? বীজগাণিতিক রাশির মাধ্যমে আমরা লিখতে পারি-

$$\text{মূল্য} = 6x + 2y \text{ টাকা}$$

এটি দুই চলকবিশিষ্ট একটি বহুপদী রাশি। কারণ, এর মান দুটি চলক x এবং y এর উপর নির্ভরশীল।

বাস্তব সমস্যা - ২.

একখানা জমির দৈর্ঘ্য x এবং প্রস্থ y হলে, জমির ক্ষেত্রফল কত? যেহেতু দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ গুণ করে ক্ষেত্রফল পাওয়া যায়, সুতরাং

$$\text{জমির ক্ষেত্রফল} = xy$$

এটি দুই চলকবিশিষ্ট একটি বহুপদী রাশি। কারণ, এর মান দুটি চলক x এবং y এর উপর নির্ভরশীল।

এভাবে বিভিন্ন বাস্তব সমস্যাকে দুই চলকবিশিষ্ট বহুপদী রাশির মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়। নিচে কয়েকটি দুই চলকবিশিষ্ট বহুপদী রাশির উদাহরণ দেওয়া হলো।

১. $x - 3y + 6$ ২. $xy - 1$ ৩. $x^2 + y^2 - xy$ ৪. $x^3 - x^2y^2 + x - y + 5$

৫.১ দুই চলকবিশিষ্ট বহুপদী রাশির সাধারণ আকার

x এবং y চলকবিশিষ্ট বহুপদী রাশিকে $p(x, y)$ দ্বারা নির্দেশ করা যায়। দুই চলকবিশিষ্ট বহুপদী রাশির পদ সাধারণত $ax^m y^n$ আকারের হয়। এখানে,

- m এবং n অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।
- a কে $x^m y^n$ এর সহগ বলে।
- $m = 0, n = 0$ হলে, $ax^m y^n = a$ একটি ধ্রুবক।
- $m + n$ কে $ax^m y^n$ পদের মাত্রা বলে। ধ্রুবক পদের মাত্রা 0.

বহুপদী রাশি $p(x, y)$ এর পদসমূহের গরিষ্ঠ মাত্রাকে $p(x, y)$ এর মাত্রা বলে।

উদাহরণ: বহুপদী রাশি $p(x, y) = x^3 - x^2y^2 + 5x$ এর প্রত্যেকটি পদের সহগ এবং মাত্রা বের করো। রাশিটির মাত্রা কত?

সমাধান: x^3 এর সহগ $= 1$ এবং মাত্রা $= 3$

- $-x^2y^2$ এর সহগ $= -1$ এবং মাত্রা $= 2 + 2 = 4$
- $5x$ এর সহগ $= 5$ এবং মাত্রা $= 1$

সুতরাং $p(x, y) = x^3 - x^2y^2 + 5x$ রাশিটির মাত্রা $= 4$.

জোড়ায় কাজ:

নিচের বহুপদী রাশিগুলোর প্রত্যেকটি পদের সহগ এবং মাত্রা বের করো। রাশিটির মাত্রা কত?

১. $x^4 - 5x^2y^2 + 3x$

২. $x^2y^2 - 5xy^3 + y^4$

৩. $xy + 3y - 5$

৪. $x^2 + 2xy - 3y^2 + 5x - 2y + 3$

৬. তিন চলকবিশিষ্ট বহুপদী (Polynomials of three variables)

দুই চলকবিশিষ্ট বহুপদী রাশির মতো বিভিন্ন বাস্তব সমস্যা থেকে তিন চলকবিশিষ্ট বহুপদী রাশি গঠিত হয়।

একটি বাস্তব সমস্যা: x, y এবং z দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট তিনটি ঘনকের আয়তনের সমষ্টি কত?

সমাধান: আমরা জেনেছি, x, দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট ঘনকের আয়তন x^3.তাহলে

x, y এবং z দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট তিনটি ঘনকের আয়তনের সমষ্টি $= x^3 + y^3 + z^3$

এটি তিন চলকবিশিষ্ট একটি বহুপদী রাশি।

৬.১ তিন চলকবিশিষ্ট বহুপদী রাশির সাধারণ আকার

x, y এবং z চলকবিশিষ্ট বহুপদী রাশিকে $p(x, y, z)$ দ্বারা নির্দেশ করা হয়। তিন চলকবিশিষ্ট বহুপদী রাশির সাধারণ পদ $ax^m y^n z^p$ আকারের হয় এবং সাধারণ পদের মাত্রা $= m + n + p$ এবং পদসমূহের গরিষ্ঠ মাত্রাকে $p(x, y, z)$ এর মাত্রা বলে।

উদাহরণ: বহুপদী রাশি $p(x, y, z) = x^3z - x^2y^2 + 2xz^3$ এর প্রত্যেকটি পদের সহগ এবং মাত্রা বের করো। রাশিটির মাত্রা কত?

সমাধান:

$x^3 z$ এর সহগ $= 1$ এবং মাত্রা $= 3 + 1 = 4$

$-x^2y^2$ এর সহগ $= -1$ এবং মাত্রা $= 2 + 2 = 4$

$2xz^3$ এর সহগ $= 2$ এবং মাত্রা $= 1 + 3 = 4$

সুতরাং $p(x, y, z) = x^3 z - x^2y^2 + 2xz^3$ রাশিটির মাত্রা $= 4$.

জোড়ায় কাজ

নিচের তিন চলকবিশিষ্ট বহুপদী রাশিগুলোর প্রত্যেকটি পদের সহগ এবং মাত্রা বের করো। রাশিটির মাত্রা কত?

১. $x^3 - 10xy^2 z + 2x^2 z + 1$

২. $x^2y^3 z - 7x^3y^3 + 3y^4z$

৩. $5xyz + 2xy^2 - 5y + 3z$

৪. $x^2y^2 z + 2yz^3 - 3y^2 + 5xy - 2z + 2$

৭. বিশেষ বৈশিষ্ট্যের বহুপদী রাশি

তোমরা লক্ষ করছো যে, অসংখ্য বহুপদীরাশি রয়েছে। অনেক বহুপদীরাশির বৈশিষ্ট্য বেশ জটিল। বহুপদীরাশির বৈশিষ্ট্য জানা থাকলে তাদের ব্যবহারের ক্ষেত্রে সুবিধা হয়। এখানে আমরা কিছু বিশেষ বৈশিষ্ট্যের বহুপদীরাশির আলোচনা করব।

৭.১ সমমাত্রিক বহুপদী (Homogeneous Polynomial)

বহুপদী রাশির বিভিন্ন উদাহরণে তোমরা লক্ষ করছো যে, কিছু বহুপদী রাশি আছে যাদের প্রত্যেকটি পদের মাত্রা সমান। এই ধরনের যে সকল বহুপদী রাশির প্রত্যেকটি পদের মাত্রা সমান তাকে **সমমাত্রিক** বহুপদী রাশি বলে। যেমন-

১. $x + y$ একটি দুই চলকবিশিষ্ট সমমাত্রিক বহুপদী রাশি। এখানে প্রত্যেকটি পদের মাত্রা 1।

২. $x^2 + 2xy + y^2$ একটি দুই চলকবিশিষ্ট সমমাত্রিক বহুপদী রাশি। এখানে প্রত্যেকটি পদের মাত্রা 2।

৩. $x^2 - 3xz + 2yz - xy + y^2$ একটি তিন চলকবিশিষ্ট সমমাত্রিক বহুপদী রাশি। এখানে প্রত্যেকটি পদের মাত্রা 3।

জোড়ায় কাজ

১. দুই চলকবিশিষ্ট বিভিন্ন পদসংখ্যার 5টি সমমাত্রিক বহুপদী রাশির উদাহরণ দাও যাদের প্রত্যেকটি পদের মাত্রা 2।

২. দুই চলকবিশিষ্ট বিভিন্ন পদসংখ্যার 5টি সমমাত্রিক বহুপদী রাশির উদাহরণ দাও যাদের প্রত্যেকটি পদের মাত্রা 3।

৩. তিন চলকবিশিষ্ট বিভিন্ন পদসংখ্যার 5টি সমমাত্রিক বহুপদী রাশির উদাহরণ দাও যাদের প্রত্যেকটি পদের মাত্রা 2।

৪. তিন চলকবিশিষ্ট বিভিন্ন পদসংখ্যার 5টি সমমাত্রিক বহুপদী রাশির উদাহরণ দাও যাদের প্রত্যেকটি পদের মাত্রা 3।

৭.২ প্রতিসম বহুপদী (Symmetric Polynomial)

একাধিক চলকবিশিষ্ট কোনো বহুপদী রাশির যে কোনো দুইটি চলক স্থান বিনিময় করলে যদি রাশিটির কোনো পরিবর্তন না হয়, তবে ওই বহুপদী রাশিকে **প্রতিসম বহুপদী** রাশি বলে। যেমন-

১. $x + y$ ২. xy ৩. $x^2 + y^2 - x - y + 1$ ৪. $xy + yz + zx$

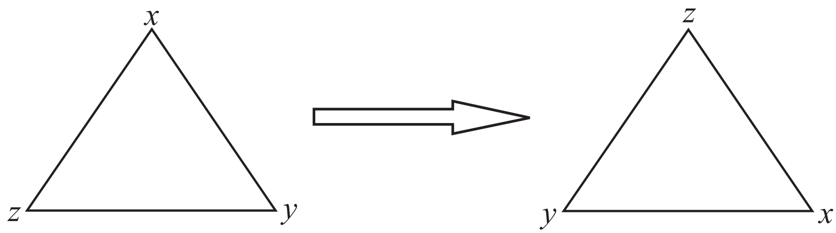
জোড়ায় কাজ

১. উপরের প্রতিসম বহুপদীর উদাহরণে দেওয়া রাশিগুলো কেনো প্রতিসম বহুপদী রাশি তা কারণসহ ব্যাখ্যা করো।

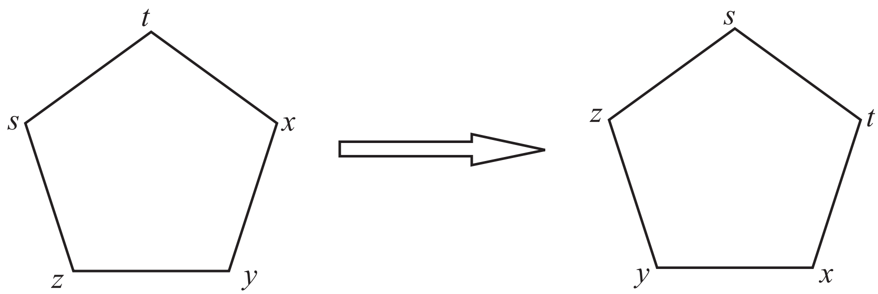
২. প্রতিসম নয় এমন বিভিন্ন পদবিশিষ্ট 5টি সমমাত্রিক বহুপদী রাশির উদাহরণ দাও।

৭.৩ চক্রক্রমিক বহুপদী (Cyclic Polynomial)

একটি বহুপদী রাশি $x + y + z + xyz$ নিই। যদি y এর স্থলে x, z এর স্থলে y এবং x এর স্থলে z বসানো হয়, তবে রাশিটির কোনো পরিবর্তন হবে না। এই ধরনের রাশিই চক্রক্রমিক বহুপদী রাশি। তিন বা তিনের অধিক চলকবিশিষ্ট বহুপদী রাশির চলকসমূহকে পর পর স্থান পরিবর্তন করলে যদি রাশিটির কোনো পরিবর্তন না হয় তবে ওই বহুপদী রাশিকে **চক্রক্রমিক বহুপদী** (cyclic polynomial) রাশি বলে। স্থান পরিবর্তন আমরা জ্যামিতিক ভাবেও দেখাতে পারি। যেমন- x, y, z চলকসমূহের চক্রক্রমিক স্থান পরিবর্তন নিম্নরূপ।



একইভাবে x, y, z, s, t চলকসমূহের চক্রক্রমিক স্থান পরিবর্তন নিম্নরূপ।



উদাহরণ:

১. $x^2 + y^2 + z^2$ একটি তিন চলকবিশিষ্ট চক্রক্রমিক বহুপদী রাশি। এখানে প্রত্যেকটি পদের মাত্রা 2. সুতরাং রাশিটির মাত্রা 2.

২. $x^3 + y^3 + z^3 + w^3 - 3xyzw$ একটি চার চলকবিশিষ্ট চক্রক্রমিক বহুপদী রাশি। এখানে সর্বাধিক 4 মাত্রার একটি পদ রয়েছে। সুতরাং রাশিটির মাত্রা 4.

জোড়ায় কাজ

১. তিন চলকবিশিষ্ট একটি সরল চক্রক্রমিক বহুপদী রাশির উদাহরণ দাও।

২. চার চলকবিশিষ্ট একটি দ্বিমাত্রিক বহুপদী রাশির উদাহরণ দাও।

৮.বহুপদী রাশির যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ

বহুপদীর চলক, সংখ্যা নির্দেশ করে। সুতরাং সংখ্যার মতো আমরা বহুপদীর যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ করতে পারি।

৮.১ যোগ ও বিয়োগ

এক চলকবিশিষ্ট দুইটি বহুপদী রাশির যোগ বা বিয়োগের ক্ষেত্রে রাশি দুইটির সমমাত্রার পদের সহগের যোগ বা বিয়োগ করে রাশি দুইটির যোগ বা বিয়োগ করতে হয়।

উদাহরণ: যদি $p(x) = x^3 - 3x + 1$ এবং $q(x) = 2x^3 - x^2 + 3$ হয়, তবে

(i) $p(x) + q(x)$ এবং (ii) $p(x) - q(x)$ কত?

সমাধান: নিচের সারণিটি পূরণ করো।

রাশি	x^3 এর সহগ	x^2 এর সহগ	x এর সহগ	ধ্রুবপদ
$p(x)$	1	0		
$q(x)$				3
সহগের যোগফল	3			
$p(x) + q(x)$	$= 3x^3 - x^2 - 3x + 4$			
$p(x) - q(\mathrm{x})$				

৮.২ গুণ

তোমরা জানো, সংখ্যারাশি বন্টন বিধি মেনে চলে। অর্থাৎ যদি a, b, c বাস্তব সংখ্যা হয় তবে,

$a(b + c) = ab + ac$

এটি হলো সংখ্যারাশির বন্টন বিধি।

এই বিধি ব্যবহার করে আমরা লিখতে পারি- যদি a, b, c, d বাস্তব সংখ্যা হয় তবে,

$(a+b)\ (c+d) = ac + ad + bc + bd$

যেহেতু বহুপদী রাশির চলক বাস্তব সংখ্যা নির্দেশ করে, সুতরাং বহুপদী রাশির ক্ষেত্রে আমরা এই নিয়ম ব্যবহার করতে পারি। বাস্তব সংখ্যার গুণ ও ভাগের মতো আমরা বহুপদী রাশির গুণ ও ভাগ করতে পারি। তোমরা পূর্বে বিভিন্ন কার্যক্রমের মাধ্যমে বহুপদী রাশির গুণ শিখেছ। সেখানে তোমরা 0 ও 1 মাত্রার বহুপদী রাশির গুণ শিখেছ। সূচকের নিয়ম এবং উপরের সূত্র ব্যবহার করে আমরা যে কোনো বহুপদী রাশির গুণফল নির্ণয় করতে পারি।

উদাহরণ: $x^2 + 3$ কে $x + 2$ দ্বারা গুণ করো।

সমাধান: $(x^2 + 3)(x + 2) = x^2.x + 2x^2 + 3x + 6$

$= x^3 + 2x^2 + 3x + 6$

একক কাজ

১. $2x + 3y$ কে $3x + 2y$ দ্বারা গুণ করো।

২. $x^2 y + 5y - 1$ কে $x^2 + y^2$ দ্বারা গুণ করো।

৮.৩ ভাগ

তোমরা সংখ্যারাশির ক্ষেত্রে দীর্ঘ ভাগ পদ্ধতি শিখেছ। যেমন, 12 কে 5 দিয়ে ভাগ করার দীর্ঘ ভাগ পদ্ধতি নিম্নরূপ:

$$\begin{array}{l} 5)\ 12\ (2 \\ \quad\ \underline{10} \\ \quad\quad 2 \end{array}$$

এখানে 12 ভাজ্য, 5 ভাজক, 2 ভাগফল এবং 2 ভাগশেষ। সংখ্যারাশির মতো আমরা বহুপদী রাশিকেও দীর্ঘ ভাগ পদ্ধতিতে ভাগ করতে পারি। যেমন–

উদাহরণ-১. $x - 1)\ 4x^2 - 4\quad (4x + 4$ $\underline{4x^2 - 4x}$ $(-)\quad 4x - 4$ $\underline{4x - 4}$ $(-)\quad 0$	**উদাহরণ-২.** $2x^2 - 1)\ 4x^2 + 1\ \ (2$ $\underline{4x^2 - 2}$ $(-)\quad 3$

একক কাজ

১. $x^4 - 3x^2 + 5$ কে $x^2 - 2$ দ্বারা ভাগ করো।

২. $x^3 + 5x - 6$ কে $x - 1$ দ্বারা ভাগ করো।

৮.৪ ভাগ প্রক্রিয়ার সাধারণ বৈশিষ্ট্য

যদি $p(x)$ এবং $d(x)$ দুটি বহুপদী রাশি হয় [যেখানে $d(x) \neq 0$], তবে

$$\frac{p(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{R(x)}{d(x)}$$

যেখানে, $q(x)$ এবং $R(x)$ দুইটি বহুপদী রাশি। $p(x)$ কে ভাজ্য (dividend), $d(x)$ কে ভাজক (divisor), $q(x)$ কে ভাগফল (quotient) এবং $R(x)$কে ভাগশেষ (remainder) বলে।

- $R(x)$ এর মাত্রা, $q(x)$ এর মাত্রার চেয়ে ছোটো।
- যদি $d(x)$ এর মাত্রা $p(x)$ এর চেয়ে বড়ো হয়, তবে $q(x) = 0$.

উপরের সমীকরণের উভয় পার্শ্বে $d(x)$ দ্বারা গুণ করলে পাই,

$$p(x) = d(x)\, q(x) + R(x) \text{ ... ... } (1)$$

অর্থাৎ

ভাজ্য = ভাজক × ভাগফল + ভাগশেষ

একক কাজ

১. $x^3 - x^2 + 2$ কে $x^2 - 2$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে?

২. $x^5 + 5x^3 - 6x - 2$ কে $x^3 - x + 1$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে?

৯. ভাগশেষ উপপাদ্য (Remainder Theorem)

এক চলকবিশিষ্ট বহুপদী রাশির জ্যামিতিক আকার পেতে হলে আমাদেরকে চলকের বিভিন্ন মানের জন্য ওই রাশির মান বের করতে হয়। এক্ষেত্রে ভাগশেষ উপপাদ্যের মাধ্যমে আমরা সহজেই ওই রাশির মান বের করতে পারি। আমরা প্রথমে উদাহরণের মাধ্যমে দেখতে পারি কীভাবে কাজটি করা যায়।

ধরো, $p(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 2$ এবং x এর বিভিন্ন মানের জন্য $p(x)$ এর মান বের করতে চাই। এবার বলো তো,

- x এর মান 0 হলে, $p(x)$ এর মান কত হবে? মাথা খাঁটিয়ে বের করে দেখো -2 হবে। অর্থাৎ $p(0) = -2$. আবার $p(x)$ কে x দ্বারা ভাগ করো, দেখো ভাগশেষও -2 হবে। অর্থাৎ ভাগশেষ $p(0)$.
- x এর মান 1 হলে $p(x)$ এর মান কত হবে? মাথা খাঁটিয়ে বের করো। এবারও কিন্তু -2 হবে। অর্থাৎ $p(1) = -2$. আবার $p(x)$ কে $x - 1$ দ্বারা ভাগ করো দেখো ভাগশেষও -2 হবে। অর্থাৎ ভাগশেষ $p(1)$.
- x এর মান -1 হলে $p(x)$ এর মান কত হবে? মাথা খাঁটিয়ে বের করো। আবার $p(x)$ কে $x + 1$ দ্বারা ভাগ করো দেখো ভাগশেষ $p(-1)$ এর সমান হবে।

উপরের ফলাফল পর্যবেক্ষণ করে ভাজকের সাথে ভাগফলের কোনো সম্পর্ক খুঁজে পাও কী? পর্যবেক্ষণ করে দেখো, নিচের সম্পর্কটি খুঁজে পাওয়া যায়। এই সম্পর্কটিই **ভাগশেষ উপপাদ্য** নামে পরিচিত।

ভাগশেষ উপপাদ্য

এক চলকবিশিষ্ট ধনাত্মক মাত্রার বহুপদী রাশি $p(x)$ কে $(x - a)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $p(a)$.

ভাগশেষ উপপাদ্যটি আমরা সহজেই প্রমাণ করতে পারি।

প্রমাণ: উপরের (1) নং সম্পর্ক থেকে আমরা পাই,

$$p(x) = d(x)q(x) + R(x)$$

যদি ভাজক $q(x) = x - a$ হয়, তবে

$$p(x) = d(x)(x - a) + R(x)$$

যেহেতু $q(x)$ এর মাত্রা 1, সুতরাং $R(x)$ একটি ধ্রুবক। ধরি, $R(x) = R$. তাহলে,

$$p(x) = d(x)(x - a) + R$$

এখন, $x = a$ হলে,

$$p(a) = d(a)(a - a) + R = R$$

অর্থাৎ $p(a)$, ভাগশেষ R এর সমান।

এখানে লক্ষণীয় যে, কোনো বহুপদী রাশিকে শুধু সরল রাশি দ্বারা অর্থাৎ $ax + b$ (যেখানে, $a \neq 0$) আকারের রাশি দ্বারা ভাগ করতে হলে, ভাগ না করেও ভাগশেষ বের করা যাবে। এক্ষেত্রে ধনাত্মক মাত্রাবিশিষ্ট বহুপদী রাশি $p(x)$ কে $ax + b$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $p\left(-\frac{b}{a}\right)$.

উদাহরণ: বহুপদী রাশি $3x^3 - 2x + 1$ কে $2x + 1$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে, ভাগশেষ উপপাদ্য ব্যবহার করে বের করো।

সমাধান: ভাগশেষ উপপাদ্য অনুযায়ী, ভাগশেষ হবে

$$p\left(-\frac{1}{2}\right) = 3\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = -\frac{3}{8} + 2 = \frac{13}{8}.$$

একক কাজ:

১. বহুপদী রাশি $x^2 - 4x + 3$ কে $x - 3$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে ভাগশেষ উপপাদ্য ব্যবহার করে বের করো।

২. বহুপদী রাশি $2x^4 - x^2 + 2$ কে $3x - 2$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে ভাগশেষ উপপাদ্য ব্যবহার করে বের করো।

১০. উৎপাদকে বিশ্লেষণ

বাস্তব সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রে উৎপাদক গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করে। উৎপাদকের মাধ্যমে আমরা চলকের মান বের করতে পারি। তাই উৎপাদকে বিশ্লেষণ একটি গুরুত্বপূর্ণ বিষয়। উৎপাদক একটি সরল রাশি হলে আমরা সহজেই চলকের একটি বাস্তব মান বের করতে পারি। সুতরাং উৎপাদকে বিশ্লেষণের সময়ে আমাদের লক্ষ থাকবে যতদূর সম্ভব সরল রাশিতে বিশ্লেষণ করা। তোমরা এর আগের শ্রেণিগুলোতে বিভিন্ন বীজগাণিতিক রাশির উৎপাদকে বিশ্লেষণ করেছ এবং বিভিন্ন কার্যক্রমের মাধ্যমে এর উপযোগিতা যাচাই করেছ। এখানে আমরা বহুপদী রাশির উৎপাদকে বিশ্লেষণের বিভিন্ন পদ্ধতি নিয়ে আলোচনা করব।

কোন একটি বহুপদী রাশিকে যদি একাধিক বহুপদী রাশির গুণফল হিসাবে লেখা যায় তবে গুণফলকৃত বহুপদী রাশিগুলোকে উক্ত বহুপদী রাশির উৎপাদক বলে। যেমন, $x^4 - 1$ এর একটি উৎপাদক $x^2 + 1$. তোমরা কি জানো $x^2 + 1$ কেনো $x^4 - 1$ এর একটি উৎপাদক হবে? কারণ, $x^2 + 1$ দিয়ে $x^4 - 1$ কে ভাগ করলে ভাগশেষ 0 হবে। তুমি নিজে ভাগ করে দেখো। $x^4 - 1$ এর আর কী কী উৎপাদক থাকতে পারে? তোমার উত্তর নিচে লেখো।

কোনো একটি বহুপদী রাশিকে এর মৌলিক বহুপদী রাশির গুণফল হিসেবে প্রকাশ করাকে ওই বহুপদী রাশির **উৎপাদকে বিশ্লেষণ** বলে।

উদাহারণ: $x^4 - 1$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করলে পাই,

$$x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$$

এখানে আমরা উৎপাদক হিসাবে দুইটি সরল রাশি $x + 1$ এবং $x - 1$ পেয়েছি। কিন্তু অন্য আরেকটি দ্বিঘাত রাশি $x^2 + 1$ একটি উৎপাদক। এই দ্বিঘাত রাশিটিকে আর বাস্তব সরল রাশিতে বিশ্লেষণ করা যায় না। উৎপাদকে বিশ্লেষণের সময় যতদূর সম্ভব সরল রাশির গুণফল হিসাবে প্রকাশ করতে হয়। কোনো সরল রাশি কোনো বহুপদী রাশির উৎপাদক কি না তা আমরা উৎপাদক উপপাদ্য ব্যবহার করে যাচাই করতে পারি।

১০.১ উৎপাদক উপপাদ্য (Factor Theorem)

এক চলকবিশিষ্ট বহুপদী রাশি $p(x)$ এর একটি উৎপাদক x - a হবে যদি এবং কেবল যদি $p(a) = 0$ হয়।

প্রমান: ধরি, $p(x)$ এক চলকবিশিষ্ট একটি বহুপদী রাশি। যদি $x - a$, $p(x)$ এর একটি উৎপাদক হয়, তবে $(x - a)$ দ্বারা $p(x)$ ভাগ করলে ভাগশেষ 0 হবে। কিন্তু ভাগশেষ উপপাদ্য অনুযায়ী, $p(x)$ কে (x – a) দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $p(a)$. অর্থাৎ $p(a) = 0$. অন্যদিকে $p(a) = 0$ হলে, $p(x)$ কে $(x - a)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ 0 হবে। অর্থাৎ $(x - a)$ হবে $p(x)$ এর একটি উৎপাদক।

একক কাজ

x এর যেসকল মানের জন্য নিচের বহুপদী রাশির মান 0 হবে তা মাথা খাটিয়ে বের করো এবং সেখান থেকে উৎপাদকগুলো বের করো এবং উৎপাদকে বিশ্লেষণ করো।

১। $x^2 - 5x - 14$ ২। $3x^2 + 4x - 4$

১০.২ সাধারণ উৎপাদক

কোনো বহুপদী রাশির প্রত্যেকটি পদে কোনো সাধারণ উৎপাদক থাকলে সেটিকে আগে উৎপাদক হিসেবে বের করে নিলে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা সহজ হয়। যেমন,

$y^2 + xy + 3y = y(y + x + 3)$

এখানে, $y^2 + xy + 3y$ রাশির প্রত্যেকটি পদে সাধারণ উৎপাদক y. লক্ষ করো যে অন্য উৎপাদক $(y + x + 3)$ একটি মৌলিক উৎপাদক। সুতরাং এটি একটি উৎপাদকের বিশ্লেষণ।

উদাহারণ: $x^2 + 3y^3 - xy - 3xy^2$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করো।

সমাধান: $x^2 + 3y^3 - xy - 3xy^2$

$=x^2 - xy - 3xy^2 + 3y^3$

$= x(x - y) - 3y^2 (x - y)$

$= (x - y)(x - 3y^2)$

১০.৩ পূর্ণবর্গ রাশির উৎপাদক

কিছু কিছু বহুপদী রাশি আছে, যে রাশিগুলোকে পূর্ণবর্গ আকারে প্রকাশ করা যায়। একটু বুদ্ধি খাটালেই তোমরা এই রাশিগুলোকে দেখে বুঝতে পারবে যে এদেরকে পূর্ণবর্গ আকারে করতে হবে। যেমন,

$$x^2 + 6xy + 9y^2$$

একটু চিন্তা করে দেখোতো যে এটিকে পূর্ণবর্গ আকারে প্রকাশ করা যায় কিনা? এটিকে আমরা লিখতে পারি,

$$x^2 + 2.x.3y + (3y)^2 = (x + 3y)^2$$

এই ধরনের রাশিকে একই রাশির উৎপাদকের গুণফল হিসাবে প্রকাশ করা যায়, অর্থাৎ

$$(x + 3y)^2 = (x + 3y)(x + 3y)$$

একক কাজ

পূর্ণবর্গ আকারে প্রকাশ করে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করো।

$$x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y + 1$$

১০.৪ দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশিত রাশির উৎপাদক

কোনো বহুপদী রাশিকে দুইটি রাশির বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ করতে চাইলে আমরা নিচের সূত্র ব্যবহার করে তা করতে পারি।

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

উদাহারণ: $x^2 + 4x + 1$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করো।

সমাধান: $x^2 + 4x + 1 = x^2 + 2.x.2 + 2^2 - 3 = (x + 2)^2 - (\sqrt{3}\,)^2$

উপরের সূত্রানুযায়ী আমরা লিখতে পারি,

$$x^2 + 4x + 1 = (x + 2 + \sqrt{3}\,)\,(x + 2 - \sqrt{3}\,)$$

লক্ষ করো যে, এখানে $2 + \sqrt{3}$ এবং $2 - \sqrt{3}$ দুইটি অমূলদ সংখ্যা।

একক কাজ: $a^4 + 4b^4$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করো।

১০.৫ দ্বিঘাত রাশির উৎপাদকে বিশ্লেষণ

$ax^2 + bx + \mathrm{c}$, $[\mathrm{a} \neq 0]$ আকারের বহুপদী রাশি বাস্তব সমস্যা তৈরি এবং সমাধানের ক্ষেত্রে খুবই গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করে। এই ধরনের রাশিকে কীভাবে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায় সে বিষয়ে আমরা এখানে আলোচনা করব।

১০.৫.১ মধ্যপদ বিভক্তির মাধ্যমে উৎপাদকে বিশ্লেষণ

$x^2 + ax + b$ আকারের রাশির সহগ a কে একটি নির্দিষ্ট পদ্ধতিতে বিভক্ত করে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায়। এক্ষেত্রে a এর মানকে এমনভাবে দুইটি সংখ্যা c এবং d তে বিভক্ত করতে হয় যাদের যোগফল a এর সমান এবং গুণফল b এর সমান হয়। তখন নিচের সূত্র ব্যবহার করে আমরা উৎপাদকে বিশ্লেষণ করতে পারি।

$$\boxed{x^2 + (c + d)\,x + cd = (x + c)(x + d)}$$

রাশিটির আকার $ax^2 + bx + c$ হলে, b এর মানকে এমনভাবে দুইটি সংখ্যা d এবং e তে বিভক্ত করতে হয় যাদের যোগফল b এর সমান এবং গুণফল ac এর সমান হয়। পরে সাধারণ উৎপাদক বের করার মাধ্যমে আমরা উৎপাদকে বিশ্লেষণ করতে পারি।

এই পদ্ধতিগুলোর মাধ্যমে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করাকে **মধ্যপদ বিভক্তি** পদ্ধতি বলে।

উদাহারণ: মধ্যপদ বিভক্তির মাধ্যমে দ্বিঘাতবিশিষ্ট বহুপদী রাশি $x^2 + 3x + 2$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করো।

সমাধান: $x^2 + 3x + 2$ রাশিকে $ax^2 + bx + c$ রাশির সাথে তুলনা করলে $a = 1$, $b = 3$, $c = 2$ পাই।

এবার তুমি কি বুদ্ধি খাটিয়ে $\mathrm{b} = 3$ কে এমনভাবে দুইটি সংখ্যায় বিভক্ত করতে পারবে যাদের যোগফল 3 এবং গুণফল $a.c = 1 \times 2 = 2$ এর সমান হয়?

দেখো সংখ্যাদুটি 2 এবং 1। তাহলে, আমরা লিখতে পারি,

$x^2 + 3x + 2 = x^2 + (2 + 1)\,x + 2 \times 1$

$= (x + 2)\,(x + 1)$ [সূত্র ব্যবহার করে]

উদাহারণ: মধ্যপদ বিভক্তির মাধ্যমে দ্বিঘাত বহুপদী রাশি $2x^2 + 3x - 2$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করো।

সমাধান: $2x^2 + 3x - 2$ রাশিকে $ax^2 + bx + c$ রাশির সাথে তুলনা করলে $a = 2, b = 3, c = -2$ পাই।

এবার তুমি কি বুদ্ধি খাটিয়ে $b = 3$ কে এমনভাবে দুইটি সংখ্যায় বিভক্ত করতে পারবে যাদের যোগফল ৩ এবং গুণফল $a.c = 2 \times (-2) = -4$ এর সমান হয়?

দেখো সংখ্যাদুটি $4, -1$। তাহলে, আমরা লিখতে পারি,

$$2x^2 + 3x - 2 = 2x^2 + 4\text{x} - x - 2$$
$$= 2x(x + 2) - 1(x + 2)$$
$$= (2x - 1)(x + 2)$$

জোড়ায় কাজ: উৎপাদকে বিশ্লেষণ করো।

১. $x^2 - 5x + 6$ ২. $3x^2 + 5x + 2$

১০.৫.২ সাধারণ পদ্ধতিতে উৎপাদকে বিশ্লেষণ

অনেক সময় $ax^2 + bx + c, [a \neq 0]$ আকারের বহুপদী রাশির মধ্যপদকে সুবিধামতোভাবে বিভক্ত করা যায় না। তখন বিভিন্ন বুদ্ধি খাটিয়ে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করতে হয়।

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left\{x^2 + 2.\text{x}.\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right\}$$

$$= a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right\}$$

$$= a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2\right\}$$

$$= a\left\{\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\right\}$$

$$= a\left\{\left(x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\right\}$$

এখানে দ্বিঘাত বহুপদী রাশিটি সরল বহুপদী রাশির মাধ্যমে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা হয়েছে। লক্ষ করো যে, $b^2 - 4ac$ এর মান ঋণাত্মক হলে, অর্থাৎ $b^2 - 4ac < 0$ হলে, দ্বিঘাত বহুপদী রাশিটি সরল বহুপদী রাশির মাধ্যমে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যাবে না। এমতাবস্থায়, $ax^2 + bx + c$, $[a \neq 0]$ দ্বিঘাত রাশিটি একটি বাস্তব মৌলিক রাশি। অর্থাৎ $ax^2 + bx + \text{c}$, $[a \neq 0]$ রাশিকে বাস্তব মানের সাপেক্ষে আর উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যাবে না।

জোড়ায় কাজ

নিচের বহুপদী রাশিগলোকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যাবে কি না পরীক্ষা করো। যে সকল রাশিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যাবে তাদেরকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করো।

১. $x^2 + 1$ ২. $x^2 - 10x + 25$ ৩. $x^2 - x + 5$ ৪. $3x^2 - 7x + 3$

১০.৬ দুইটি ঘনরাশির যোগফলের উৎপাদক

ঘন এর সূত্র হতে আমরা জানি,

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

এই সূত্রকে ব্যবহার করে আমরা অনেক বহুপদী ঘনরাশির উৎপাদকে বিশ্লেষণ করতে পারি।

উদাহরণ: $x^3 + 8y^3$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করো।

সমাধান: $x^3 + 8y^3 = x^3 + (2y)^3$

$= (x + 2y)(x^2 - x.2y + (2y)^2)$

$= (x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2)$

একক কাজ

দুইটি ঘনরাশির যোগফলের সূত্র ব্যবহার করে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করো।

১. $8x^3 + 27y^3$ ২. $x^3 + \frac{1}{x^3}$ ৩. $x^3 + 3x^2 + 3x + 9$

১০.৭ দুইটি ঘনরাশির বিয়োগফলের উৎপাদক

ঘন এর সূত্র হতে আমরা জানি,

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

এই সূত্রকে ব্যবহার করে আমরা অনেক বহুপদী ঘনরাশির উৎপাদকে বিশ্লেষণ করতে পারি।

উদাহরণ: $x^3 - 64y^3$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করো।

সমাধান: $x^3 - 64y^3 = x^3 - (4y)^3$

$$= (x - 4y)(x^2 + x.4y + (4y)^2)$$

$$= (x - 4y)(x^2 + 4xy + 16y^2)$$

একক কাজ

দুইটি ঘনরাশির যোগফলের সূত্র ব্যবহার করে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করো।

১. $27x^3 - 125y^3$ ২. $8x^3 - \dfrac{1}{8x^3}$ ৩. $x^3 - 6x^2 + 12x - 7$

অভেদ (Identity)

ধরি, $p(x)$ এবং $q(x)$ দুইটি বহুপদী রাশি। যদি x এর সকল মানের জন্য $p(x) = q(x)$ সমীকরণটি সিদ্ধ হয়; তখন তাকে অভেদ (identity) বলে। একে $p(x) \equiv q(x)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। '$\equiv$' চিহ্নকে অভেদ চিহ্ন বলা হয়।

উদাহরণ: ধরি, $p(x) = (x + 1)^2$ এবং $q(x) = x^2 + 2x + 1$. তাহলে, $p(x) = q(x)$, অর্থাৎ $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ একটি অভেদ। কারণ, x এর সকল মানের জন্যই এই সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

লক্ষ করো যে, $x^2 + 2x + 1 = 0$ একটি অভেদ নয়। কারণ, x এর সকল মানের জন্যই এই সমীকরণটি সিদ্ধ নয়। যেমন, $x = 1$ হলে, বামপক্ষ $= 4$ এবং ডানপক্ষ $= 0$.

১০.৮ আংশিক ভগ্নাংশ (Partial Fractions)

$\dfrac{p(x)}{q(x)}$ [যেখানে $p(x)$ এবং $q(x) \neq 0$ বহুপদী রাশি] আকারের রাশিকে বহুপদীর ভগ্নাংশ বা মূলদ ভগ্নাংশ (Rational Fraction) বলে। বহুপদীর ভগ্নাংশ রাশিকে ব্যবহারের সুবিধার জন্য অনেক সময় একাধিক ভগ্নাংশে বিভক্ত করতে হয়। এই ভাবে একাধিক ভগ্নাংশে বিভক্ত অংশকে **আংশিক ভগ্নাংশ** বলে।

উদাহরণ: বহুপদীর ভগ্নাংশ রাশি $\dfrac{3x + 1}{x^2 - 1}$ কে দুইটি অংশে বিভক্ত করতে হবে যেখানে হর একঘাতবিশিষ্ট বহুপদী রাশি। তোমরা কী বুদ্ধি খাটিয়ে বের করতে পারবে? যাদের গণনা শক্তি বেশি তারা হয়তো পারবে। লক্ষ করে দেখো,

$$\frac{3x + 1}{x^2 - 1} = \frac{3x + 1}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{1}{x + 1} + \frac{2}{x - 1}$$

এখানে, $\dfrac{1}{x + 1}$ এবং $\dfrac{2}{x - 1}$, $\dfrac{3x + 1}{x^2 - 1}$ এর আংশিক ভগ্নাংশ।

১০.৮.১ আংশিক ভগ্নাংশে পরিবর্তনের বিভিন্ন পদ্ধতি

বহুপদীর ভগ্নাংশ রাশি $\frac{p(x)}{q(x)}$ কে বিভিন্ন পদ্ধতিতে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করা যায়। এটি $p(x)$ এবং $q(x)$ মাত্রার উপর নির্ভর করে।

প্রকৃত ভগ্নাংশে পরিবর্তনের পদ্ধতি

যখন $p(x)$ এর মাত্রা $q(x)$ এর মাত্রার কম এবং তাদের মধ্যে কোনো সাধারণ উৎপাদক না থাকে, তখন $\frac{p(x)}{q(x)}$ কে **প্রকৃত ভগ্নাংশ** (proper fraction) বলে। যেমন, $\frac{3x+1}{x^2-1}$ একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ। এই ধরনের রাশিকে আমরা নিম্নলিখিত পদ্ধতিতে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করতে পারি।

১. যদি $q(x)$ এর শুধু একঘাতবিশিষ্ট উৎপাদক থাকে এবং উৎপাদকসমূহের কোনো পুনরাবৃত্তি না হয়, তখন $q(x)$ এর প্রত্যেকটি উৎপাদকের জন্য একটি করে আংশিক ভগ্নাংশ হবে এবং প্রত্যেক আংশিক ভগ্নাংশের লবে ধ্রুবক ধরতে হবে।

উদাহরণ: $\frac{3x+1}{x^2-1}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করো।

সমাধান: এখানে, $p(x) = 3x + 1$ এবং $q(x) = x^2 - 1$। $q(x)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে পাই, $q(x) = (x - 1)\ (x + 1)$. লক্ষ করো যে, $q(x)$ এর শুধু একঘাতবিশিষ্ট 2টি উৎপাদক আছে এবং উৎপাদকসমূহের কোনো পুনরাবৃত্তি নাই।

সুতরাং $q(x)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে বসিয়ে পাই, $\frac{3x+1}{x^2-1} \equiv \frac{3x+1}{(x-1)(x+1)}$

ধরি,

$$\frac{3x+1}{(x-1)(x+1)} \equiv \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$$

উভয় পক্ষে $(x - 1)\ (x + 1)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$3x + 1 = A(x - 1) + B(x + 1).$$

$x = -1$ হলে, $-2 = -2A$ অর্থাৎ $A = 1$.

$x = 1$ হলে, $4 = 2B$ অর্থাৎ $B = 2$.

সুতরাং,

$$\frac{3x+1}{x^2-1} \equiv \frac{3x+1}{(x-1)(x+1)} \equiv \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1}$$

লক্ষ করে দেখো, বুদ্ধি খাটিয়ে $\frac{3x+1}{x^2-1}$ এর যে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করেছিলে তার সাথে মিলে গেছে।

২. যদি $q(x)$ এর শুধু একঘাতবিশিষ্ট উৎপাদক থাকে এবং উৎপাদকসমূহের পুনরাবৃত্তি হয়, তখন $q(x)$ এর যেসকল উৎপাদকের পুনরাবৃত্তি আছে তাদের প্রত্যেক পুনরাবৃত্তির জন্য একটি করে আংশিক ভগ্নাংশ হবে এবং প্রত্যেক আংশিক ভগ্নাংশের লবে ধ্রুবক ধরতে হবে।

উদাহরণ: $\frac{x+2}{(x-1)(x^2-1)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর

সমাধান: এখানে $q(x) = (x-1)(x^2-1) = (x-1)(x-1)\,(x+1) = (x-1)^2\,(x+1)$. অর্থাৎ, উৎপাদক $x-1$ এর 2বার পুনরাবৃত্তি আছে।

ধরি,

$$\frac{x+2}{(x-1)(x^2-1)} \equiv \frac{x+2}{(x-1)^2\,(x+1)} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

উভয় পক্ষে $(x-1)^2\,(x+1)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$x+2 \equiv A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2$$

এখন x এর মান -1, 1 এবং 0 বসিয়ে A, B, C এর মান বের করো। দেখো $A = -\frac{1}{4}$, $B = \frac{3}{2}$ এবং $C = \frac{1}{4}$ হবে। সুতরাং,

$$\frac{x+2}{(x-1)(x^2-1)} \equiv \frac{1}{4(x-1)} + \frac{3}{2(x-1)^2} + \frac{1}{4(x+1)}$$

৩. যদি $q(x)$ এর একঘাত এবং দ্বিঘাতবিশিষ্ট উৎপাদক থাকে এবং উৎপাদকসমূহের কোনো পুনরাবৃত্তি না হয়, তখন $q(x)$ এর একঘাতবিশিষ্ট উৎপাদকের জন্য লবে ধ্রুবক এবং দ্বিঘাতবিশিষ্ট উৎপাদকের জন্য লবে একঘাতবিশিষ্ট বহুপদী রাশি ধরতে হবে।

উদাহরণ: $\frac{x+2}{(x-1)(x^2+2)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করো।

সমাধান: ধরি,

$$\frac{x+2}{(x-1)(x^2+2)} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$

উভয় পক্ষে $(x-1)(x^2+2)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$x+2 \equiv \mathrm{A}(x^2+2) + (Bx+C)(x-1)$$

বুদ্ধি খাটাও।

A, B, C এর মান বের করো। দেখো A = 1, B = –1 এবং C = 0.

সুতরাং

$$\frac{x+2}{(x-1)(x^2+2)} \equiv \frac{1}{x-1} - \frac{x}{x^2+2}$$

৪. যদি $q(x)$ এর দ্বিঘাতবিশিষ্ট উৎপাদক থাকে এবং দ্বিঘাতবিশিষ্ট উৎপাদকের পুনরাবৃত্তি হয়, তখন $q(x)$ এর দ্বিঘাতবিশিষ্ট উৎপাদকের প্রত্যেক পুনরাবৃত্তির জন্য একটি করে আংশিক ভগ্নাংশ হবে এবং প্রত্যেক আংশিক ভগ্নাংশের লবে একঘাতবিশিষ্ট বহুপদী রাশি ধরতে হবে।

উদাহরণ: $\dfrac{x+1}{(x-1)(x^2+1)^2}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করো।

সমাধান: ধরি,

$$\frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)^2} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

উভয় পক্ষে $(x-1)(x^2+1)^2$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$x+1 \equiv \mathrm{A}(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x-1)(x^2+1) + (Dx+E)(x-1)$$

বুদ্ধি খাটাও।

A, B, C এর মান বের করো। দেখো $A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}, C = -\frac{1}{2}, D = -1$ এবং $E = 0$

সুতরাং

$$\frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)^2} \equiv \frac{1}{2(x-1)} - \frac{x+1}{2\,(x^2+1)} - \frac{x}{(x^2+1)^2}$$

অপ্রকৃত ভগ্নাংশকে পরিবর্তনের পদ্ধতি

যখন $p(x)$ এর মাত্রা $q(x)$ এর মাত্রার সমান বা বেশি হয় এবং তাদের মধ্যে কোনো সাধারণ উৎপাদক না থাকে, তখন $\frac{p(x)}{q(x)}$ কে **অপ্রকৃত ভগ্নাংশ** (improper fraction) বলে। যেমন, $\frac{3x^2+1}{x^2-1}$ একটি অপ্রকৃত ভগ্নাংশ। এই ধরনের রাশিকে আমরা একটি বহুপদী রাশি এবং একটি প্রকৃত ভগ্নাংশের যোগফল হিসাবে প্রকাশ করতে পারি। যেমন, $\frac{3x^2+1}{x^2-1} = 3 + \frac{4}{x^2-1}$. তখন উপরের পদ্ধতি অনুসারে প্রকৃত ভগ্নাংশকে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করতে পারি।

উদাহরণ: $\frac{x^3+1}{x^2+1}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করো।

সমাধান: ভাগ পদ্ধতিতে উপরের ভগ্নাংশকে ভাগ করলে ভাগফল ও ভাগশেষ কত হবে বলতো? তোমার উত্তর মিলিয়ে দেখো যে, ভাগফল $= x$ এবং ভাগশেষ $= -x+1$.

সুতরাং, $\frac{x^3+1}{x^2+1} = x + \frac{-x+1}{x^2+1} = x - \frac{x-1}{x^2+1}$

এখানে $\frac{x-1}{x^2+1}$ একটি আংশিক ভগ্নাংশ।

দলগত কাজ

শিক্ষার্থীরা শিক্ষকের নির্দেশমতো কয়েকটি দলে বিভক্ত হয়ে নিম্নোক্ত কাজটি সম্পন্ন করবে।

কাজের নির্দেশনা:

১। শিক্ষক প্রত্যেক দলকে ৫টি বহুপদী রাশি (একঘাত ২টি, দ্বিঘাত ২টি, ত্রিঘাত ১টি) লিখে দিবেন।

২। প্রতি দল রাশিগুলোর জ্যামিতিক আকার গ্রাফ পেপারে উপস্থাপন করবে।

৩। জ্যামিতিক আকারের সাথে সামঞ্জস্যপূর্ণ ৫টি প্রাকৃতিক বস্তু সংগ্রহ করে গ্রাফপেপারের সাথে যুক্ত করবে।

৪। শিক্ষকের দেয়া দ্বিঘাত ও ত্রিঘাত বহুপদী রাশিগুলোকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করবে এবং পোস্টার পেপারে উপস্থাপন করবে।

৫। শিক্ষকের নির্দেশমতো কোনো একটি নির্দিষ্ট দিনে সকল কাজ একটি পোস্টার পেপারে উপস্থাপন করবে।

অনুশীলনী

১. তিনটি বাস্তব উদাহরণ থেকে বহুপদী রাশি গঠন করো।

২. নিচের নির্দেশনা মোতাবেক বহুপদী রাশির উদাহরণ দাও।
i) এক চলক, ত্রিমাত্রিক, দ্বিপদী ii) এক চলক, ত্রিমাত্রিক, চতুর্পদী iii) দুই চলক, ত্রিমাত্রিক, দ্বিপদী
iv) দুই চলক, ত্রিসমমাত্রিক, ত্রিপদী v) চার চলক, চক্রক্রমিক, চতুর্মাত্রিক

৩. উদাহরণ দাও: i) সমমাত্রিক, প্রতিসম, চক্রক্রমিক বহুপদী রাশি, ii) সমমাত্রিক, প্রতিসম বহুপদী রাশি কিন্তু চক্রক্রমিক নয়, iii) সমমাত্রিক, চক্রক্রমিক বহুপদী রাশি কিন্তু প্রতিসম নয়, iv) প্রতিসম, চক্রক্রমিক বহুপদী রাশি, কিন্তু সমমাত্রিক নয়।

৪. i) ভাগ প্রক্রিয়ার মাধ্যমে $x^4 - 3x^2 + 1$ কে $2x^2 - 3$ দ্বারা ভাগ করো।
ii) ভাগ প্রক্রিয়ার মাধ্যমে $5x^3 - 3x - 2$ কে $3x - 2$ দ্বারা ভাগ করো এবং ভাগশেষ উপপাদ্য ব্যবহার করে তোমার পাওয়া ভাগশেষের সত্যতা যাচাই করো।

৫. নিচের বহুপদী রাশিগুলোর কোনটি বাস্তব মৌলিক রাশি তা নির্ণয় করো। যেগুলো বাস্তব মৌলিক রাশি নয় সেগুলোকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করো।
i) $x^2 - 5x - 14$ ii) $x^2 - 5x + 2$ iii) $2x^2 + 3x + 1$ iv) $3x^2 + 4x - 1$

৬ উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর:
i) $x^3 - 5x + 4$ ii) $x^3 - 3x^2 + 3x - 2$ iii) $x5 - 16xy^4$

৭ একটি ঘনক আকৃতির চৌবাচ্চার দৈর্ঘ্য অন্য একটি ঘনক আকৃতির চৌবাচ্চার দৈর্ঘ্যের বিপরীত গুণিতক। চৌবাচ্চা দুইটির দৈর্ঘ্যের যোগফল 3 ফুট হলে, তাদের আয়তনের যোগফল কত?

৮ আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর:
i) $\dfrac{x+1}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$, ii) $\dfrac{x^3+1}{x^2+1}$

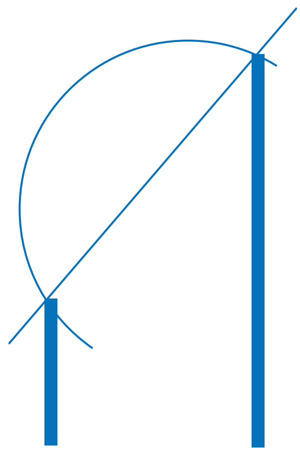
শিক্ষার্থীদের প্রতি কিছু নির্দেশনা:

বহুপদী রাশির প্রয়োজনীয়তা এবং ব্যবহার বোঝার জন্য একক কাজ, জোড়ায় কাজ, দলগত কাজ এবং অনুশীলনীতে দেওয়া কাজগুলো নিজে বুঝে করতে হবে। এই ধরনের সমস্যা নিজে তৈরি করে সমাধানও নিজে করতে হবে। তাহলেই বিষয়টি পুরো আয়ত্বে আসবে।

বাস্তব সমস্যা সমাধানে সহসমীকরণ

এই অভিজ্ঞতায় শিখতে পারবে-

- দুই চলকের একঘাত সমীকরণ
- এক চলকের দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধান
- লেখচিত্রের সাহায্যে দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধান
- দুই চলকের একঘাত ও এক চলকের দ্বিঘাত সহসমীকরণ সমাধান



বাস্তব সমস্যা সমাধানে সহসমীকরণ

গাণিতিক সমস্যা সমাধানের জন্য বীজগণিতের অন্যতম গুরুত্বপূর্ণ বিষয় হলো সমীকরণ। তোমরা ইতোমধ্যে পূর্বের শ্রেণিগুলোতে সরল সমীকরণের ধারণা পেয়েছ। এক চলকবিশিষ্ট সরল সমীকরণগুলো সমাধানের কৌশলও তোমাদের জানা। তাছাড়া দৈনন্দিন জীবনে যে নানাবিধ বাস্তবভিত্তিক সমস্যা তোমাকে মোকাবেলা করতে হয় তারও কিছু কিছু সরল সমীকরণ গঠন করে সমাধান করতে পার। তাই না? যে সমীকরণগুলো তোমাকে গঠন করতে হয়, তার সবগুলোই কি এক চলকবিশিষ্ট হয়? নাকি কোনো কোনো ক্ষেত্রে দুই বা আরও বেশি চলকবিশিষ্ট হতে পারে। এসো আমরা কিছু বাস্তব সমস্যা সমাধানের মাধ্যমে বিষয়টি বোঝার চেষ্টা করি।

দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণ গঠন ও সমাধান

নিচের ছক ৫.১ এর সমস্যাগুলোর সমীকরণ গঠন করে সমাধান করার চেষ্টা করো:

ছকঃ ৫.১

বাস্তব সমস্যা	সমীকরণ	সমাধান
১. দেয়াশলাইয়ের 20টি কাঠি দিয়ে কয়টি আলাদা আলাদা বর্গ তৈরি করা যাবে?		
২. লিলি ও তার ভাইয়ের বয়সের অনুপাত 3 : 4; দুজনের মোট বয়স 21 বছর হলে, লিলির বয়স কত?		
৩. সেতু দোকান থেকে 18 টাকায় দুটি ইরেজার ও একটি পেন্সিল ক্রয় করে। কোনটির মূল্য কত দোকানদার তাকে বলেনি। তোমরা বলো তো কোনটির মূল্য কত হতে পারে?		

পর্যবেক্ষণ

ক) (i) নং সমস্যাটি সমাধানের জন্য ☐ চলকবিশিষ্ট সমীকরণ গঠন করেছি এবং চলকের ☐ টি মান পেয়েছি, যা দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

খ) (ii) নং সমস্যাটি সমাধানের জন্য ☐ চলকবিশিষ্ট সমীকরণ গঠন করেছি এবং চলকের ☐ টি মান পেয়েছি, যা দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

গ) (iii) নং সমস্যাটি সমাধানের জন্য ☐ চলকবিশিষ্ট সমীকরণ গঠন করেছি এবং চলকের ☐ টি মান পেয়েছি, যার সবগুলো দ্বারাই সমীকরণটি সিদ্ধ হয়। এক্ষেত্রে চলকের নির্দিষ্ট কোনো মান বের করতে পারি নাই।

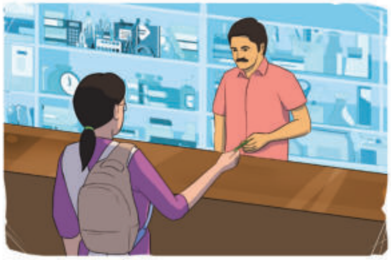
সেতুর সমস্যার সমাধান

উপরের ছক ৫.১ এর ৩ নম্বর সমস্যাটি সেতু নিজেও সমাধানের জন্য খুব চেষ্টা করছে। তোমাদের মতো সেও প্রথমে একটি ইরেজারের মূল্য x টাকা এবং একটি পেন্সিলের মূল্য y টাকা ধরে নেয়। তারপর সমস্যাটি বিশ্লেষণ করে দুই চলকবিশিষ্ট নিচের সমীকরণটি পেল।

$$2x + y = 18 \text{ ... ... (i)}$$

এবার ছক ৫.২ এর মতো একটি ছক তৈরি করে x ও y এর বিভিন্ন মান নিয়ে প্রাপ্ত সমীকরণটির বামপক্ষ ও ডানপক্ষের সত্যতা যাচাই করো।

ছক-৫.২			
x এর মান	y এর মান	বামপক্ষ $(2x + y)$ এর মান	ডানপক্ষ
1	16	$(2 \times 1) + 16 = 18$	18
2	14	$(2 \times 2) + 14 = 18$	18
3	12	$(2 \times 3) + 12 = 18$	18
4	10	$(2 \times 4) + 10 = 18$	18
...	...	...	18

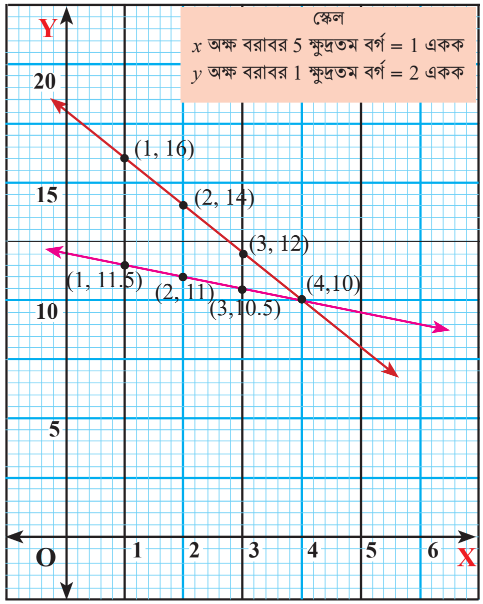


দেখা যাচ্ছে, x ও y এর অসংখ্য মানের জন্য সমীকরণটির বামপক্ষ ও ডানপক্ষ সত্য হচ্ছে। অর্থাৎ সমীকরণটির অসংখ্য সমাধান আছে। সমাধানগুলো হলো: (1, 16), (2, 14), (3, 12), (4, 10),...। এর অর্থ হলো- একটি ইরেজার ও একটি পেন্সিলের ক্রয়মূল্য অনেকভাবেই হতে পারে। কিন্তু তা কী করে সম্ভব? সমস্যাটি আরও গভীরভাবে বিশ্লেষণের জন্য সে ওই দোকান থেকে পুনরায় একটি ইরেজার ও দুটি পেন্সিল ক্রয় করে। এবার দোকানদার তার কাছ থেকে মোট 24 টাকা নেয়। সেতু পূর্বের মতো একটি ইরেজারের মূল্য x টাকা এবং

একটি পেন্সিলের মূল্য y টাকা ধরে সমস্যাটি বিশ্লেষণ করে দুই চলকবিশিষ্ট $x + 2y = 24$......(ii) সমীকরণটি পেলো। তারপর নিচের ছকটি (ছক-৫.৩) তৈরি করে x ও y এর বিভিন্ন মান নিয়ে প্রাপ্ত সমীকরণটির বামপক্ষ ও ডানপক্ষের সত্যতা যাচাই করো।

ছক-৫.৩

x এর মান	y এর মান	বামপক্ষ $(2x + y)$ এর মান	ডানপক্ষ
1	11.5	$1 + 2(11.5)$	24
2	11	$2 + 2(11)$	24
3	10.5	$3 + 2(10.5)$	24
4	10	$4 + 2(10)$	24
…	…	…	24



এক্ষেত্রেও দেখা যাচ্ছে, x ও y এর অসংখ্য মানের জন্য সমীকরণটির বামপক্ষ ও ডানপক্ষ সত্য হচ্ছে। অর্থাৎ সমীকরণটির অসংখ্য সমাধান আছে এবং সমাধানগুলো হলো: $(1, 11.5)$, $(2, 11)$, $(3, 10.5)$, $(4, 10)$, … এর মানে, এবারও একটি ইরেজার ও একটি পেন্সিলের ক্রয়মূল্য অনেকগুলো হতে পারে।

সেতু এ ব্যাপারে এবার তার বিষয় শিক্ষকের সাথে পরামর্শ করে। বিষয় শিক্ষক সমীকরণ দুটিকে একত্রে জোট হিসেবে বিবেচনা করে সেতুকে সমাধান করতে বললেন। তিনি বললেন, তুমি তো পূর্বের শ্রেণিতে জেনেছ, এই ধরনের সমীকরণ একেকটি সরলরেখার সমীকরণ এবং ছক কাগজে বিন্দু বসিয়ে এই ধরনের সরলরেখা আঁকা যায়। তাই তুমি চাইলে সমীকরণ দুটিকে দুটি সরলরেখার মাধ্যমে একটি ছক কাগজে উপস্থাপন করে দেখতে পার। হয়তো, সরলরেখা দুটি কোনো একটি বিন্দুতে ছেদ করতে পারে। যদি কোনো একটি বিন্দুতে সরলরেখা দুটি ছেদ করে, তবে জানবে ওই বিন্দুর x ও y এর মানই হবে তোমার কাঙ্খিত সমাধান।

বিষয় শিক্ষকের পরামর্শ অনুসারে সেতু প্রথমে ছক-৫.৩ এর মতো করে একটি ছক কাগজে সরলরেখা দুটি অঙ্কন করে। অঙ্কন অনুসারে সরলরেখা দুটি $(4, 10)$ বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করে। ছেদ বিন্দুতে, $x = 4$ এবং $y = 10$। সেতু বুঝতে পারে, একটি ইরেজারের মূল্য 4 টাকা এবং একটি পেন্সিলের মূল্য 10 টাকা।

তোমরা নিশ্চয়ই বুঝতে পারলে, কোনো বাস্তবভিত্তিক ঘটনা এভাবে দুটি চলক ও দুটি এক ঘাতবিশিষ্ট সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়। এধরনের সহসমীকরণকে দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণ (Simultaneous linear equations in two variables) বলা হয় এবং ওই সরল সহসমীকরণের ছেদ বিন্দুকে ওই সরল সহসমীকরণের সমাধান (Solution of the simultaneous linear equations) বলে।

জোড়ায় কাজ:

ক) মনে করো, তোমাদের আয়তাকৃতির শ্রেণিকক্ষটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ জানা নেই। শিক্ষক বললেন, শ্রেণিকক্ষটির প্রস্থের দ্বিগুণ, দৈর্ঘ্য অপেক্ষা 10 মিটার বেশি এবং পরিসীমা 100 মিটার। তোমাদের কাজ হলো, শ্রেণিকক্ষটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থকে দুটি চলক ধরে দুটি সমীকরণ গঠন করা এবং সমীকরণ দুটি সমাধান করে শ্রেণিকক্ষটির মেঝের ক্ষেত্রফল বের করা। [ছক কাগজে সরলরেখা এঁকে সমাধান করতে পারবে]

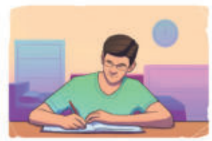
খ) এবার শ্রেণিকক্ষটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ হাতে-কলমে মেপে মেঝের ক্ষেত্রফল বের করো। তারপর ‘ক’ থেকে প্রাপ্ত ক্ষেত্রফলের সত্যতা যাচাই করো।

রাফি ও সোনিয়ার সমস্যা ও সমাধান

সমস্যা: সেতুর বন্ধু রাফি 28 টাকায় 2 প্যাকেট আলপিন ও 3টি কলম এবং সোনিয়া একই দরে ওই দোকান থেকে 56 টাকায় 4 প্যাকেট আলপিন ও 6টি কলম ক্রয় করে। এক্ষেত্রেও রাফি বা সোনিয়া কেউ প্রতি প্যাকেট আলপিন বা প্রতিটি কলমের মূল্য কত তা জানে না। সেতুর মতো আমরা কি পারি না রাফি ও সোনিয়ার সমস্যাটি সমাধান করে দিতে? তাহলে চলো, চেষ্টা করে দেখি:

সমাধান: ধরো, 1প্যাকেট আলপিনের দাম x টাকা এবং 1টি কলমের দাম y টাকা।

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ দুইটি হবে,



$$2x + 3y = 28 \ldots\ldots\ldots(\text{i})$$

এবং $$4x + 6y = 56 \ldots\ldots\ldots(\text{ii})$$

(i) ও (ii) নং সমীকরণ দুটিকে তোমরা কোন ধরনের সমীকরণ বলবে? যুক্তিসহ নিচের ফাঁকা ঘরে লেখো।

এবার ছক কাগজে সমীকরণ দুটির লেখচিত্র অঙ্কন করে তাদের ছেদবিন্দু খুঁজে বের করো।

প্রথমে (i) ও (ii) নং সমীকরণ থেকে দুইটি সরলরেখা অঙ্কনের জন্য কয়েকটি করে বিন্দু নির্ণয় করো।

(i) নং সমীকরণ হতে পাই,

x	$y=\dfrac{28-2x}{3}$	(x, y)
2		
5	6	(5, 6)
14		

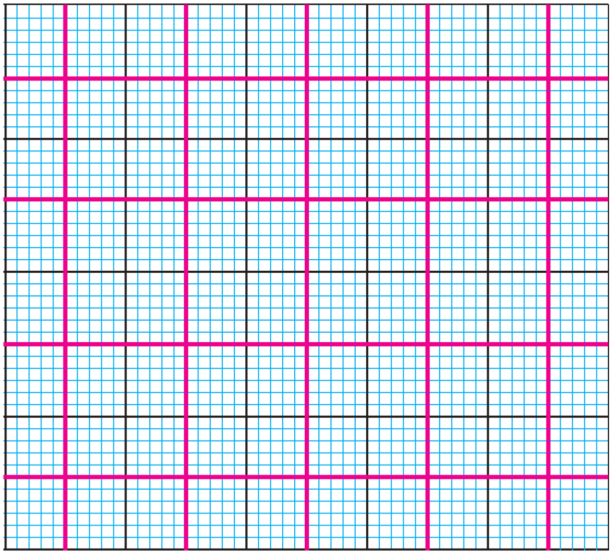
(ii) নং সমীকরণ হতে পাই,

x	$y=\dfrac{56-4x}{6}$	(x, y)
2	8	(2, 8)
8		
11		

(i) নং সমীকরণ থেকে পাই $(x, y) = (\quad ,\quad), (5, 6), (\quad ,\quad), (\quad ,\quad)$

এবং (ii) নং সমীকরণ থেকে পাই $(x, y) = (2, 8), (\quad ,\quad), (\quad ,\quad), (\quad ,\quad)$

পাশের ছক কাগজে (i) ও (ii) নং সমীকরণ থেকে প্রাপ্ত বিন্দুগুলো স্থাপন করে (তোমার সুবিধামতো স্কেল নিয়ে নাও) সরলরেখা দুটি অঙ্কন করো।



কী দেখতে পেলে? সরলরেখা দুইটির একটি অপরটির উপর সমাপতিত হয়েছে? অর্থাৎ (i) নং সরলরেখার উপরস্থ প্রতিটি বিন্দুই (ii) নং সরলরেখার উপর আছে।

সুতরাং প্রত্যেকটি স্থানাঙ্কই (i) ও (ii) নং সমীকরণকে সিদ্ধ করে। 1 প্যাকেট আলপিনের দাম 5 টাকা হলে 1টি কলমের দাম 6 টাকা হবে। আবার 1 প্যাকেট আলপিনের দাম 2 টাকা হলে 1টি কলমের দাম 8 টাকা হবে এবং এভাবে চলতে থাকবে। এক্ষেত্রে (i) ও (ii) নং সমীকরণ দুইটির কয়টি সমাধান পেয়েছ?

একক কাজ:

খুঁশি 30 টাকায় 2টি পোষ্টার পেপার ও 3টি সাইন পেন ক্রয় করে। দোলা ওই একই দোকান থেকে একই মূল্যের 4টি পোষ্টার পেপার ও 6টি সাইন পেন 50 টাকায় ক্রয় করে।

ক) সমীকরণ গঠন করে লেখচিত্র অঙ্কন করো।

খ) লেখচিত্র থেকে সমীকরণ দুইটির সাধারণ সমাধান পাওয়া যায় কিনা ব্যাখ্যা করো।

গ) একটি পোষ্টার পেপার ও একটি সাইন পেনের ক্রয়মূল্য সম্পর্কে তোমার মতামত ব্যক্ত করো।

দুইটি সরল সহসমীকরণের সমাধান যোগ্যতা (সমঞ্জস/অসমঞ্জস) (Consistency of two simultaneous linear equations)

দুইটি সরল সহসমীকরণের সমাধান একটি হতে পারে, অসংখ্য হতে পারে আবার কোনো সমাধান নাও থাকতে পারে। সুতরাং আমরা যদি আগে থেকেই বের করতে পারি সমাধান আছে কি না তা হলে সুবিধা হয় না? এসো আমরা বিভিন্ন পর্যবেক্ষণের মাধ্যমে সমাধান থাকার শর্তগুলো বের করার চেষ্টা করি।

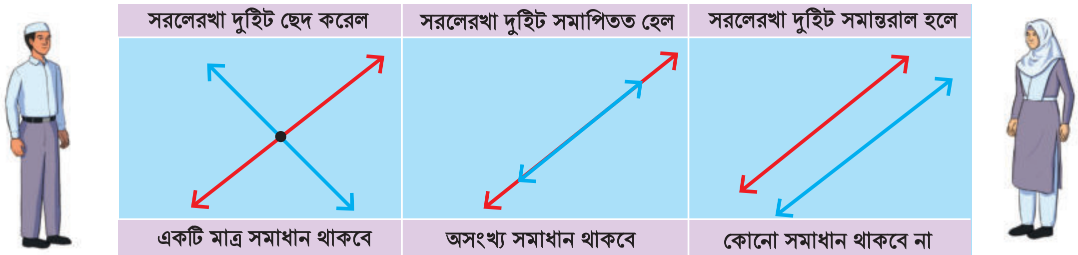
জ্যামিতিক পর্যবেক্ষণ

দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণ লেখচিত্রের মাধ্যমে সমাধান করে নিম্নলিখিত শর্তগুলো পাওয়া গেল।

ক) যখন দুইটি সরলরেখা একটি বিন্দুতে ছেদ করে, তখন সমীকরণ দুইটি সমাধান করা যায় এবং একটি মাত্র সাধারণ সমাধান থাকে।

খ) যখন দুইটি সরলরেখা সমাপতিত হয়, তখন একটি মাত্র সরলরেখাই হয় এবং সমীকরণ দুইটির অসংখ্য সাধারণ সমাধান থাকে।

গ) যখন দুইটি সরলরেখা অসমাপতিত কিন্তু পরস্পর সমান্তরাল হয়, তখন সমীকরণ দুইটির কোনো সাধারণ সমাধান থাকে না।



বীজগাণিতিক পর্যবেক্ষণ

সাধারণভাবে, $a_1x + b_1y = c_1$, $a_2x + b_2y = c_2$ সহসমীকরণ দুইটির x, y এর সহগদ্বয় এবং ধ্রুবক পদ তুলনা করেও দুইটি সরল সহসমীকরণের সমাধান যোগ্যতা (সমঞ্জস/অসমঞ্জস) নির্ধারণ করা যায় (ছক-৫.৪ দ্রষ্টব্য) ।

ছক- ৫.৪

দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণ	অনুপাতগুলোর তুলনা	লেখচিত্রে সমীকরণ দুইটির অবস্থান	সমঞ্জস (Consistent) অসমঞ্জস (Inconsistent)	বীজগাণিতিক সিদ্ধান্ত
	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখা	সমঞ্জস (Consistent)	একটি মাত্র সাধারণ সমাধান আছে
$a_1x + b_1y = c_1$ $a_2x + b_2y = c_2$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	দুইটি সমাপতিত সরলরেখা	সমঞ্জস (Consistent)	অসংখ্য সাধারণ সমাধান আছে
	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	দুইটি অসমাপতিত সরলরেখা কিন্তু পরস্পর সমান্তরাল	অসমঞ্জস (Incoensistent)	কোনো সাধারণ সমাধান নেই

জোড়ায় কাজ: নিচে দুই চলকবিশিষ্ট একটি করে সরল সমীকরণ দেওয়া হলো। প্রত্যেক শর্তের জন্য দুই চলকবিশিষ্ট একটি করে সরল সমীকরণ লেখো।:

প্রদত্ত সরল সমীকরণ	শর্ত		
	একটি মাত্র সমাধান আছে	অসংখ্য সমাধান আছে	কোনো সমাধান নেই
$2x + 3y = 7$			
$y - 4x = 2$			
$-2x + 5y = 8$			
$3x - \frac{6}{5}y = 2$			

মাথা খাটাও

১. p এর কোন মানের জন্য $3x - 4y = 1$ এবং $9x + py = 2$ এর একটি মাত্র সমাধান থাকবে।

২. r এর কোন মানের জন্য $rx + 2y = 5$ এবং $(r + 1)\,x + 3y = 2$ সমীকরণ দুইটির কোনো সমাধান পাওয়া যাবে না।

৩. k এর কোন মানের জন্য $kx + 6y = k$ এবং $(k - 1)\,x + 4y = 5 - k$ সমীকরণ দুইটির অসংখ্য সমাধান থাকবে?

৪. a ও b এর কোন মানের জন্য $3x - (a + 1)\,y = 2b - 1$ এবং $5x + (1 - 2a)\,y = 3b$ সমীকরণ দুইটির অসংখ্য সমাধান থাকবে?

দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণ সমাধানের পদ্ধতি

আমরা প্রধানত জ্যামিতিক ও বীজগাণিতিক এই দুই পদ্ধতিতেই দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণ সমাধান করতে পারি। চলো, সমাধানের পদ্ধতিগুলো জেনে নিই।

জ্যামিতিক পদ্ধতি (Geometric Method)	বীজগাণিতিক পদ্ধতি (Algebraic Methods)
লৈখিক পদ্ধতি (Graphical Method)	• প্রতিস্থাপন পদ্ধতি (Substitution Method)
	• অপনয়ন পদ্ধতি (Elimination Method)
	• আড়গুণন পদ্ধতি (Cross Multiplication Method)

লৈখিক পদ্ধতিতে সমাধান (Solving by Graphical Method)

জ্যামিতিক উপায়ে লেখচিত্র অঙ্কন করে কীভাবে দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণ সমাধান করা যায়, এরই মধ্যে তোমাদের সেই অভিজ্ঞতা হয়েছে। তোমরা ইতোমধ্যেই দেখেছ, সরল সহসমীকরণের প্রত্যেকটির লেখ একেকটি সরলরেখা। আর সরলরেখাটির প্রত্যেকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক সংশ্লিষ্ট সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে। তাই কোনো সরল সমীকরণের লেখ নির্দিষ্ট করতে দুই বা ততোধিক বিন্দুর স্থানাঙ্ক আবশ্যক। চলো নিচের দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণ দুইটিকে লৈখিক পদ্ধতিতে সমাধান করে সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ সমাধান বের করার চেষ্টা করি।

উদাহরণ: নিচের দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণ দুইটিকে লৈখিক পদ্ধতিতে সমাধান করো।

$4x - y = 5 \ldots\ldots\ldots(i)$

$7x - 4y = 2 \ldots\ldots\ldots(ii)$

নির্দেশনা

সমাধান যোগ্যতা যাচাই করে নিই: $\frac{4}{7} \neq \frac{1}{4}$

$\therefore$ সমীকরণজোট সমঞ্জস (consistent) এবং এর একটি মাত্র সাধারণ সমাধান আছে।

সমাধান: (i) ও (ii) নং সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য তিনটি করে বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

(i) নং সমীকরণ হতে পাই $y = 4x \quad 5$

x	2		0
$y = 4x - 5$		7	-5

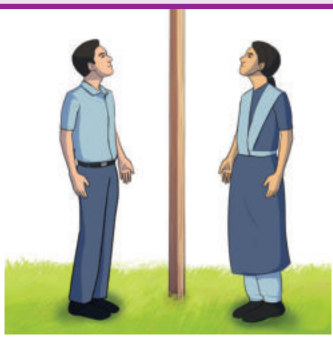
আবার, (ii) নং সমীকরণ হতে পাই $y = \frac{7x - 2}{4}$

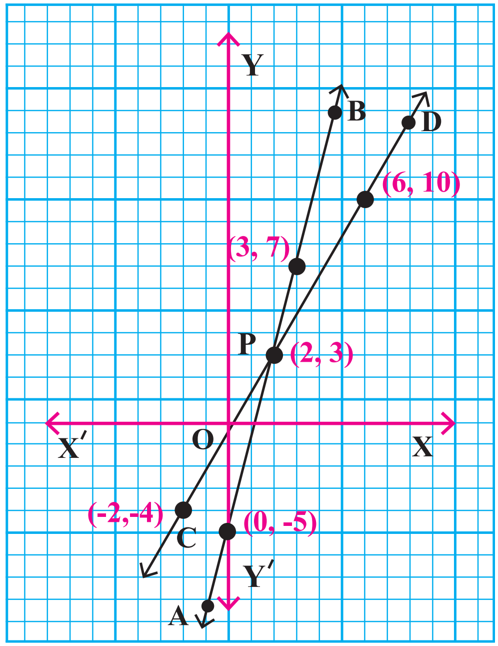
x		-2	6
$y = \frac{7x - 2}{4}$	3		

বিন্দুগুলো পাশের গ্রাফ কাগজে বসিয়ে সরলরেখা দুটি আঁকো।

লেখচিত্র থেকে দেখা যাচ্ছে, (i) নং [AB সরলরেখা] ও (ii) নং [CD সরলরেখা] সমীকরণদ্বয় একটি সাধারণ বিন্দুতে ছেদ করেছে। হিসাব করে দেখি ছেদ বিন্দু P এর স্থানাঙ্ক (2, 3)।

(i) ও (ii) নং সমীকরণদ্বয়ের একটি মাত্র সাধারণ সমাধান $(x, y) = (2, 3)$





একক কাজ:

নিচের প্রতিজোড়া সমীকরণের মধ্যে যেগুলো সমাধানযোগ্য তাদের লেখচিত্র এঁকে সমাধান করো এবং অসংখ্য সমাধানের ক্ষেত্রে কমপক্ষে তিনটি সমাধান লেখো:

i) $4x - 3y = 6$, $4y - 5x = -7$

ii) $4x + 3y = 20$, $8x + 6y = 40$

iii) $\frac{x}{5} + \frac{y}{4} = 23$, $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 22$

iv) $3x - \frac{2}{y} = 5$, $x + \frac{4}{y} = 4$

প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে সমাধান (Solving by Substitution Method)

এই পদ্ধতিতে আমরা নিচের ধাপগুলো অনুসরণ করে দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণকে সমাধান করতে পারি:

ধাপ-১ : যে কোনো সমীকরণ থেকে চলক দুটির একটির মান অপরটির মাধ্যমে প্রকাশ করা

ধাপ-২ : ধাপ-১ থেকে প্রাপ্ত চলকের মানটি অপর সমীকরণে স্থাপন করে এক চলকবিশিষ্ট সমীকরণ তৈরি ও সমাধান করা।

ধাপ-৩ : নির্ণীত সমাধান প্রদত্ত সমীকরণ দুটির যে কোনো একটিতে বসিয়ে অপর চলকের মান নির্ণয় করা

উদাহরণ-১: নিচের দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণের সমাধান যোগ্যতা যাচাই করো। সমাধান যোগ্য হলে প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে সমাধান করো।

$x + 3y = 16 \ldots\ldots\ldots(\text{i})$

$2x - y = 4 \ldots\ldots\ldots(\text{ii})$

নির্দেশনা

সমাধান যোগ্যতা যাচাই করে নিই: $\frac{1}{2} \neq -\frac{3}{1}$

$\therefore$ সমীকরণজোটটি সমঞ্জস (consistent) এবং এর একটি মাত্র সাধারণ সমাধান আছে।

ধাপ - ১	ধাপ - ২	ধাপ - ৩	সমাধান
(ii) নং সমীকরণ হতে পাই, $2x - y = 4$ $\therefore y = 2x - 4 \ldots(\text{iii})$	y এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই, $x + 3(2x - 4) = 16$ বা, $x + 6x - 12 = 16$ বা, $7x = 16 + 12$ বা, $7x = 28$ $\therefore x = 4$	(iii) নং এ $x = 4$ বসিয়ে পাই, $y = 2.4 - 4$ বা, $y = 8 - 4$ $\therefore y = 4$	$x = 4$ এবং $y = 4$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (4, 4)$

একক কাজ:

নিচের প্রতিজোড়া সমীকরণের মধ্যে যেগুলো সমাধানযোগ্য সেগুলো প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে সমাধান করো এবং সমাধানে পাওয়া চলকদ্বয়ের মান সমীকরণকে সিদ্ধ করছে কিনা যাচাই করো।

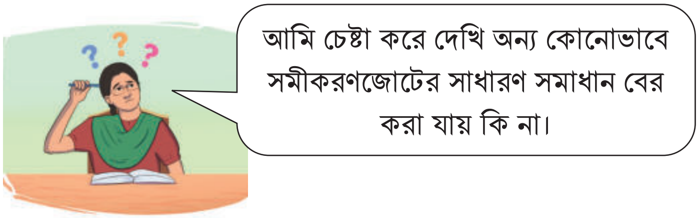
i) $2x + 3y = 32$, $11y - 9x = 3$

ii) $8x + 5y - 11 = 0$, $3x - 4y - 10 = 0$

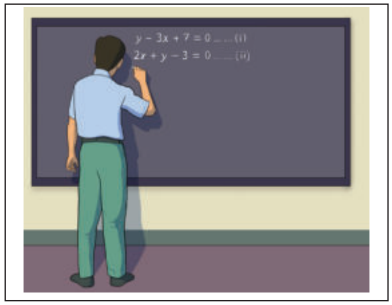
iii) $\frac{2}{x} + \frac{5}{y} = 1$, $\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = \frac{19}{20}$

iv) $x + y = p + q$, $px - qy = p^2 - q^2$

উদাহরণ-২: রাফি বোর্ডে $y - 3x + 7 = 0$ এবং $2x + y - 3 = 0$ সমীকরণ দুটি লিখল।



সেতু



রাফির লেখা সমীকরণ দুটি হলো :

$y - 3x + 7 = 0 \ldots\ldots(i)$

$2x + y - 3 = 0 \ldots\ldots(ii)$

সমাধানের জন্য নিচের ধাপগুলো অনুসরণ করি।

নির্দেশনা

সমাধান যোগ্যতা যাচাই করে নিই: $-\frac{3}{2} \neq \frac{1}{1}$

$\therefore$ সমীকরণজোটটি সমঞ্জস এবং এর একটি মাত্র সাধারণ সমাধান আছে।

ধাপ - ১	ধাপ - ২	ধাপ - ৩	সমাধান
(i) নং সমীকরণ হতে পাই, $y - 3x + 7 = 0$ $\therefore y = 3x - 7 \ldots(iii)$ আবার (ii) নং সমীকরণ হতে পাই, $2x + y - 3 = 0$ $\therefore y = -2x + 3 \ldots(iv)$	(iii) নং সমীকরণ হতে y এর মান (iv) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই। $3x - 7 = -2x + 3$ বা, $3x + 2x = 3 + 7$ বা, $5x = 10 \quad \therefore x = 2$	(iii) নং এ $x = 2$ বসিয়ে পাই, $y = 3.2 - 7$ বা, $y = 6 - 7$ $\therefore y = -1$	$x = 2$ এবং $y = -1$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (2, -1)$

জোড়ায় কাজ:

সহপাঠীদের সাথে আলোচনা করে নিচের সহসমীকরণগুলো প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে সমাধান করো :

i) $4x - 3y = 16$, $5y + 6x = 62$

ii) $2x + y - 8 = 0$, $3x - 2y - 5 = 0$

iii) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$, $2x + 4y = 11$

iv) $x + \frac{2}{y} = 7$, $2x - \frac{6}{y} = 9$

অপনয়ন পদ্ধতিতে সমাধান (Solving by Elimination Method)

অপনয়ন পদ্ধতিতে আমরা নিচের ধাপগুলো অনুসরণ করে দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণকে সমাধান করতে পারি:

ধাপ-১ : সুবিধামতো একটি সমীকরণকে বা উভয় সমীকরণকে এরূপ সংখ্যা দিয়ে গুণ করতে হবে যেন গুণনের পর উভয় সমীকরণের যে কোনো একটি চলকের সহগের পরমমান সমান হয়।

ধাপ-২ : প্রয়োজনমতো সমীকরণ দুটিকে যোগ বা বিয়োগ করে সহগ সমানকৃত চলকটি অপসারিত করা। তারপর সমাধান করে বিদ্যমান চলকটির মান বের করা

ধাপ-৩ : নির্ণীত সমাধান প্রদত্ত সমীকরণ দুটির যে কোনো একটিতে বসিয়ে অপর চলকের মান নির্ণয় করা

গণিত ক্লাসে শিক্ষক বললেন, চলো আজ একটা মজার খেলা খেলি। খেলাটি হলো-একজনের তৈরি গাণিতিক ধাঁধাঁ বা সমস্যার উত্তর অপরজনকে দিতে হবে। শর্ত হলো- ধাঁধাঁ বা সমস্যাটি এমন হবে যা সমাধানের জন্য দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণ গঠন করতেই হবে। তারপর সমীকরণজোটের যে কোনো একটি চলক অপসারণ করে সমাধান করতে হবে। শিক্ষকের কথা শুনে, সেতু রাফিকে নিচের সমস্যাটি সমাধান করতে বলল।

কোনো ভগ্নাংশের লব x এবং হর y. লবের সাথে 7 যোগ করলে ভগ্নাংশটির মান 2 হয়। আবার হর হতে 2 বিয়োগ করলে ভগ্নাংশটির মান 1 হয়। ভগ্নাংশটি কত?

রাফি প্রথমে সমস্যাটি ভালোভাবে পড়ে নেয়। তারপর নিচের মতো করে দুটি সমীকরণ গঠন করে:

ধাপ - ১	ধাপ - ২	ধাপ - ৩	সমাধান
$\frac{x+7}{y} = 2$ বা, $x + 7 = 2y$ $\therefore x - 2y = -7 \ldots$(i) এবং $\frac{x}{y-2} = 1$ বা, $x = y - 2$ $\therefore x - y = -2 \ldots$(ii)	(i) নং ও (ii) নং সমীকরণের চলক x এর সহগ সমান এবং একই চিহ্নযুক্ত। তাই সে সমীকরণ (i) থেকে সমীকরণ (ii) বিয়োগ করে। অর্থাৎ $x - 2y = -7$ $x - y = -2$ $-\quad +\quad +$ $-y = -5$ $\therefore y = 5$	এবার (ii) নং এ $y = 5$ বসিয়ে পায়, $x - 5 = -2$ বা, $x = -2 + 5$ $\therefore x = 3$	$x = 3$ এবং $y = 5$ নির্ণেয় ভগ্নাংশ $= \frac{3}{5}$

এইভাবে দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণ জোটের যে কোনো একটি চলক অপনয়ন বা অপসারণ করে অন্য চলকটির মান বের করার পদ্ধতিকে আমরা **অপনয়ন পদ্ধতি** বলতে পারি।

একক কাজ:

নিচের সহসমীকরণগুলো অপনয়ন পদ্ধতিতে সমাধান করো :

i) $2x - 5y = 3$	ii) $6x - y - 1 = 0$	iii) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 8$	iv) $ax + by = c$
$x + 3y = 1$	$3x + 2y - 13 = 0$	$\frac{5x}{4} - 3y = -3$	$a^2x + b^2y = c^2$

আড়গুণন পদ্ধতিতে সমাধান (Solving by Cross Multiplication Method)

আড়গুণন পদ্ধতিতে কীভাবে দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণের সাধারণ সমাধান নির্ণয় করা হয়, সে সম্পর্কে জানার চেষ্টা করি।

প্রথমে নিচের সমীকরণ দুটি বিবেচনা করি :

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \ldots\ldots\ldots(i)$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \ldots\ldots\ldots(ii)$$

প্রথমে (i) ও (ii) নং সহসমীকরণ থেকে চলক x এর মান নির্ণয় করতে চাই। তাই (i) ও (ii) নং সমীকরণের চলক y কে অপনয়ন বা অপসারণ করতে হবে। আর এর জন্য সমীকরণ (i) কে b_2 এবং সমীকরণ (ii) কে b_1 দ্বারা গুণ করি :

$$a_1b_2x + b_1b_2y + b_2c_1 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (iii)$$

$$a_2b_1x + b_1b_2y + b_1c_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (iv)$$

এখন, (iii) নং থেকে (iv) নং বিয়োগ করে পাই,

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x + b_2c_1 - b_1c_2 = 0$$

বা, $(a_1b_2 - a_2b_1)x = b_1c_2 - b_2c_1$

$$\therefore \frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (v)$$

আবার, (i) ও (ii) নং সমীকরণজোট থেকে চলক y এর মান নির্ণয় করতে চাই। তাই (i) ও (ii) নং সমীকরণের চলক x কে অপনয়ন বা অপসারণ করতে হবে। আর এর জন্য সমীকরণ (i) কে a_2 এবং সমীকরণ (ii) কে a_1 দ্বারা গুণ করি :

$$a_1a_2x + a_2b_1y + c_1a_2 = 0 \ldots\ldots\ldots (vi)$$

$$a_1a_2x + a_1b_2y + c_2a_1 = 0 \ldots\ldots\ldots (vii)$$

এখন, (vi) নং থেকে (vii) নং বিয়োগ করে পাই,

$$(a_2b_1 - a_1b_2)y + c_1a_2 - c_2a_1 = 0$$

বা, $(a_2b_1 - a_1b_2)y = c_2a_1 - c_1a_2$

বা, $-(a_1b_2 - a_2b_1)y = -(c_1a_2 - c_2a_1)$

$$\therefore \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \text{.................} \text{(viii)}$$

সমীকরণ (v) ও (viii) নং তুলনা করে পাই,

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \text{....................(ix)}$$

x ও y এর এরূপ সম্পর্ক থেকে এদের মান নির্ণয়ের কৌশলকে **আড়গুণন পদ্ধতি** (Cross Multiplication Method) বা বজ্রগুণন পদ্ধতি বলা হয়।

x ও y এর উপরের সম্পর্ক থেকে আমরা লিখতে পারি,

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad \therefore x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

এবং $\dfrac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \dfrac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad \therefore y = \dfrac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$

প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সমাধান : $(x, y) = \left(\dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \dfrac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\right)$

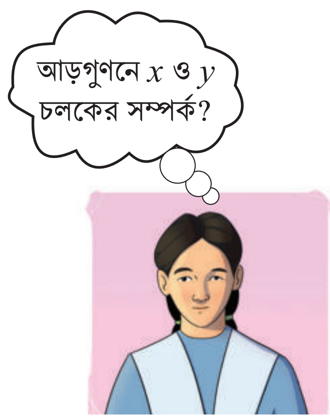
সহসমীকরণদ্বয়

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

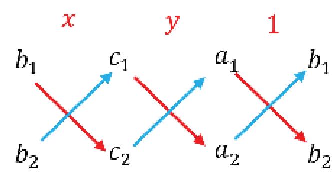
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

উপরের সহসমীরণ থেকে আমরা সরাসরি লিখতে পারি,

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$



উপরের সম্পর্কটি পাওয়ার জন্য আমরা নিচের কৌশলটি ব্যবহার করতে পারি।

সমীকরণ	x ও y এর মধ্যে সম্পর্ক	মনে রাখার কৌশল
$a_1x+b_1y+c_1=0$ $a_2x+b_2y+c_2=0$	$\dfrac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\dfrac{y}{c_1a_2-c_2a_1}$ $=\dfrac{1}{a_1b_2-a_2b_1}$	 লাল তীর চিহ্নের সংখ্যার গুণন থেকে নীল তীর চিহ্নির সংখ্যার গুণন বিয়োগ করেতে হবে।

সমস্যা: গাছের চারা রোপণ

প্রতি বছরই সেতুদের স্কুলের সামনের খোলা মাঠে বৃক্ষমেলা বসে। একদিন স্কুল ছুটির পর সেতু ও তার বন্ধু রহিম মেলায় গেল। সেতু তাদের বাড়ির চারপাশের ফাঁকা জায়গায় গাছের চারা রোপণ করার জন্য একজন চারা বিক্রেতার নিকট থেকে 310 টাকা দিয়ে 4টি পেয়ারা গাছের চারা এবং 5টি লেবু গাছের চারা ক্রয় করল এবং রহিম একই দরে 3টি পেয়ারা গাছের চারা এবং 2টি লেবু গাছের চারা ক্রয় করে বিক্রেতাকে মোট 180 টাকা দিলো। একটি পেয়ারা গাছের চারা ও একটি লেবু গাছের চারার দাম কত?

সমাধান: ধরো, 1টি পেয়ারা গাছের চারার দাম x টাকা এবং 1টি লেবু গাছের চারার দাম y টাকা।

শর্তানুসারে প্রথমে আমরা সহসমীকরণ গঠন করি :

$$4x+5y=310\ldots\ldots\ldots(i)$$

$$3x+2y=180\ \ldots\ldots\ldots(ii)$$

নির্দেশনা

সমাধান যোগ্যতা যাচাই করে নিই: $\dfrac{4}{3}\neq\dfrac{5}{2}$

$\therefore$ সমীকরণজোটটি সমঞ্জস এবং এর একটি মাত্র সাধারণ সমাধান আছে।

আমরা আড়গুণন পদ্ধতিতে সমীকরণজোটের সাধারণ সমাধান নির্ণয় করতে চাই। সেজন্য (i) ও (ii) নং সমীকরণদ্বয়কে নিম্নরূপে লিখতে পারি :

$$4x+5y-310=0$$

$$3x+2y-180=0$$

সমীকরণদ্বয়কে $a_1x+b_1y+c_1=0$

$$a_2x+b_2y+c_2=0$$

এর সাথে তুলনা করে পাই,

$a_1 = 4, \quad b_1 = 5, \quad c_1 = -310, \quad a_2 = 3, \quad b_2 = 2, \quad c_2 = -180$

সুতরাং আড়গুণন পদ্ধতি প্রয়োগ করে পাই,

বা, $\dfrac{x}{5 \times (-180) - 2 \times (-310)} = \dfrac{y}{(-310) \times 3 - (-180) \times 4} = \dfrac{1}{4 \times 2 - 3 \times 5}$

বা, $\dfrac{x}{-900 + 620} = \dfrac{y}{-930 + 720} = \dfrac{1}{8 - 15}$

বা, $\dfrac{x}{-280} = \dfrac{y}{-210} = \dfrac{1}{-7}$

বা, $\dfrac{x}{40} = \dfrac{y}{30} = \dfrac{1}{1}$ [-7 দ্বারা গুণ করে]

এখন, $\dfrac{x}{40} = \dfrac{1}{1}$ আবার, $\dfrac{y}{30} = \dfrac{1}{1}$

$\therefore x = 40 \qquad \therefore y = 30$

$\therefore$ 1টি পেয়ারা গাছের চারার দাম 40 টাকা এবং 1টি লেবু গাছের চারার দাম 30 টাকা।

একক কাজ:

ক) প্রদত্ত সহসমীকরণগুলো আড়গুণন বা বজ্রগুণন পদ্ধতিতে সমাধান করো :

i) $5x - 2y = 32$
$4x - y = 28$

ii) $7x - 3y - 31 = 0$
$9x - 5y - 41 = 0$

iii) $x + 5y = 36$
$\dfrac{x + y}{x - y} = \dfrac{5}{3}$

খ) সেতুর পড়ার ঘরটির মেঝে আয়তাকৃতি। ঘরটির মেঝের দৈর্ঘ্য 2 মিটার এবং প্রস্থ 3 মিটার বৃদ্ধি করলে ক্ষেত্রফল 75 বর্গমিটার বৃদ্ধি পায়। কিন্তু দৈর্ঘ্য 2 মিটার হ্রাস এবং প্রস্থ 3 মিটার বৃদ্ধি করলে ক্ষেত্রফল 15 বর্গমিটার বৃদ্ধি পায়। সহসমীকরণ গঠন ও আড়গুণন পদ্ধতিতে সমাধান করে সেতুর পড়ার ঘরটির মেঝের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

দলগত প্রজেক্ট

শিক্ষক ক্লাসের সকল শিক্ষার্থীকে 3টি দলে ভাগ করবেন। এবার 3টি কাগজ নিয়ে প্রত্যেক কাগজে 2টি করে সরল সহসমীকরণ লিখবেন। প্রত্যেক কাগজে একই সরল সহসমীকরণ লিখবেন। এবার কাগজ 3টি ভাজ করে কাগজের উপরে একটিতে প্রতিস্থাপন পদ্ধতি, একটিতে অপনয়ন পদ্ধতি এবং একটিতে আড়গুণন পদ্ধতি লিখে

প্রত্যেক দলকে লটারির মাধ্যমে একটি করে কাগজ দিবেন। প্রত্যেক দল নিচের কাজগুলো সম্পন্ন করবে।

১. সহসমীকরণের সমঞ্জস্যতা যাচাই করবে।

২. কাগজের উপরে লেখা পদ্ধতিতে সরল সহসমীকরণ সমাধান করবে।

৩. গ্রাফ কাগজে সরলরেখা দুটি এঁকে ছেদ বিন্দু বের করে সমাধানের সত্যতা যাচাই করবে।

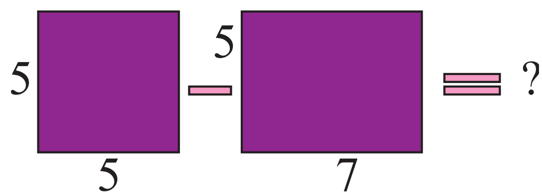
৪. সকল কার্যক্রম একটি পোষ্টার পেপারে উপস্থাপন করে শিক্ষকের নির্দেশনা মোতাবেক প্রদর্শন করবে।

দুই চলকের একঘাত ও দ্বিঘাত সহসমীকরণ

তোমরা ইতোমধ্যে দুইচলকের একঘাত সমীকরণের সাথে পরিচিত হয়েছো। যেমন $2x - 3y = 6$, এই সমীকরণটিতে দুইটি চলক x ও y যাদের প্রত্যেকের ঘাত এক। একারণে এটি দুইচলকের একঘাতবিশিষ্ট একটি সমীকরণ। এখন আমরা এক চলকের দ্বিঘাত সমীকরণের আলোচনা করব।

এক চলকের দ্বিঘাত সমীকরণ

চলো একটি মজার কুইজ দিয়ে শুরু করি। নিচের বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল থেকে আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল বিয়োগ করলে বিয়োগফল কত হবে তা হিসাব করে লিখো।



নিশ্চয় লিখতে পারছো,

$5^2 - 7 \times 5 = -10$

লক্ষ করো, বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য ও আয়তক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য পরস্পর সমান বা 5।

এই ক্ষেত্র দুইটির বাহুর দৈর্ঘ্য যদি জানা না থাকত, তাহলে কি আমরা এত সহজেই বিয়োগফল বলে দিতে পারতাম?

সেক্ষেত্রে, আমরা চলকের আশ্রয় নিতাম। মনে করতে পারতাম উভয় ক্ষেত্রের সমান বাহুটির দৈর্ঘ্য x।

তাহলে উপর্যুক্ত সমীকরণটি দাঁড়াত,

$$x^2 - 7x = -10$$

তোমরা কি বলতে পার, এটি কোন ধরনের সমীকরণ? সমীকরণটিতে কেবল একটি চলক x ব্যবহৃত হয়েছে। তাই চলকের ভিত্তিতে এটি একটি একচলকবিশিষ্ট সমীকরণ। আবার সমীকরণটিতে চলক x এর সর্বোচ্চ ঘাত 2। একারণে, ঘাতের ভিত্তিতে এটি একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। সুতরাং, দুইটি বৈশিষ্ট্যকে একত্রে করে বলা হয়, এটি একটি এক চলকবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ।

এক চলকের দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধান পদ্ধতি

দ্বিঘাত সমীকরণকে সমাধান করতে হলে সমীকরণের সকল পদ গাণিতিক নিয়মানুযায়ী '=' চিহ্নের বামদিকে এনে ডানদিকে 0 বসাতে হবে। বামদিকে আমরা একটি এক চলকবিশিষ্ট দ্বিঘাত বহুপদী রাশি পাব। এই দ্বিঘাত বহুপদী রাশিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করতে হবে (উৎপাদকে বিশ্লেষণ করার পদ্ধতি বহুপদী রাশির অভিজ্ঞতায় আলোচনা করা হয়েছে)। পরে প্রত্যেকটি উৎপাদকের মান 0 ধরে চলকের মান বের করতে হবে।

মধ্যপদ বিস্তৃতির মাধ্যমে সমাধান

এক চলকবিশিষ্ট দ্বিঘাত বহুপদী রাশি

$$ax^2 + bx + c$$

এর মধ্যপদ বিস্তৃতি বলতে বোঝায়, b কে দুইটি সংখ্যা d এবং e এর মাধ্যমে এমনভাবে বিভক্ত করো যেন, $d + e = b$ এবং $de = ac$ হয়।

উদাহরণ: $x^2 - 7x = -10$ সমীকরণটি সমাধান করো।

সমাধান: $x^2 - 7x = -10$ সমীকরণটিকে লিখতে পারি,

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

এবার বামপক্ষকে মধ্যপদ বিস্তৃতি করে পাই,

$x^2 - 5x - 2x + 10 = 0$

বা, $x(x - 5) - 2(x - 5) = 0$

বা, $(x - 5)(x - 2) = 0$

এখন প্রত্যেকটি উৎপাদকের মান 0 ধরে পাই,

$(x - 5) = 0$ অথবা $(x - 2) = 0$

সুতরাং $x = 5$ অথবা $x = 2$.

মাথা খাটাও

মাথা খাটাও

-7 কে এমনভাবে দুইটি সংখ্যায় বিভক্ত করো যেন যোগফল -7 এবং গুণফল 10 হয়।

এখানে বাস্তব সংখ্যার নিয়ম

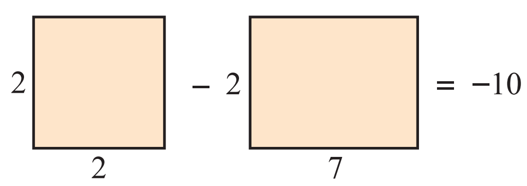
$a.b = 0$ যদি এবং কেবল যদি $a = 0$

অথবা $b = 0$ ব্যবহার করা হয়েছে।

এখানে লক্ষ করো, যে বাস্তব সমস্যা থেকে সমীকরণটি তৈরি করা হয়েছিল সেখানে বর্গক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 5 ছিল।

তাহলে $x = 2$ কোথা থেকে এলো!

মজার ব্যাপার হলো, বর্গক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 2 হলেও সঠিক উত্তর পাওয়া যায়।



লক্ষ করো, মধ্যপদ বিস্তৃতি করে

আমরা খুব সহজেই $x^2 - 7x + 10 = 0$ সমীকরণটির উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে ফেলেছি। কিন্তু সমীকরণটিতে যদি $x^2 - 7x - 10 = 0$ হতো, তাহলে কি এত সহজেই মধ্যপদ বিস্তৃতি করে সমাধান করা যেত? না, এত সহজেই সমাধান করা যেত না (চেষ্টা করে দেখো)। সকল দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধান করার একটি বিশেষ পদ্ধতি রয়েছে। চলো আমরা দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধান করার সেই পদ্ধতিটি শিখে ফেলি।

সাধারণ পদ্ধতিতে সমাধান

দ্বিঘাত সমীকরণের আদর্শরূপ হলো:

$ax^2 + bx + c = 0$

যেখানে a, b, c বাস্তব সংখ্যা এবং $a \neq 0$

উভয় পক্ষকে $4a$ দ্বারা গুণ করি,

$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$

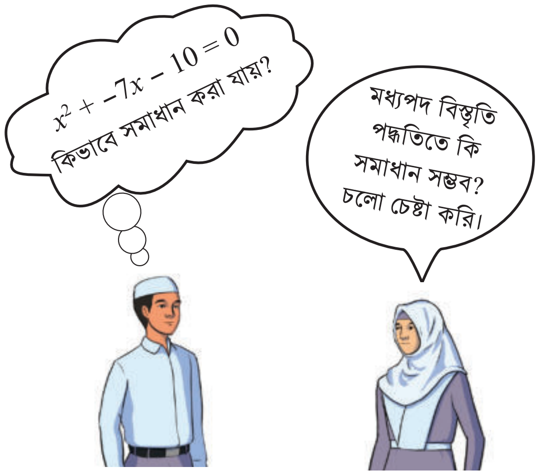
বা, $(2ax)^2 + 2.2ax.b + b^2 - b^2 + 4ac = 0$

বা, $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$

বা, $2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$

বা, $2ax = -b \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



অতএব, সমীকরণটির দুইটি সমাধান বা x এর দুইটি মান পাওয়া যায় যথা:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ এবং } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$b^2 - 4ac$ কে দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2 + bx + c = 0$ এর **নিশ্চায়ক** (discriminant) বলা হয়। এই নিশ্চায়ক মূলদ্বয়ের প্রকৃতি নির্ধারণ করে।

- $b^2 - 4ac = 0$ হলে সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব ও পরস্পর সমান এবং মূল দুইটি উভয়ই $x = -\frac{b}{2a}$
- $b^2 - 4ac > 0$ এবং পূর্ণবর্গ সংখ্যা হলে সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব, অসমান ও মূলদ হয়।
- $b^2 - 4ac > 0$ এবং পূর্ণবর্গ সংখ্যা না হলে সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব, অসমান ও অমূলদ হয়।
- $b^2 - 4ac < 0$ হলে সমীকরণটির কোনো বাস্তব মূল নেই।

জোড়ায় কাজ

নিচে কয়েকটি সমীকরণ দেওয়া হলো। সমীকরণগুলোর মূলের প্রকৃতি নির্ণয় করে নিচের তালিকাটি পূরণ করো।

ক্রমিক	সমীকরণ	নিশ্চায়ক $b^2 - 4ac$	নিশ্চায়কের প্রকৃতি	মূলের প্রকৃতি
1	$2x^2 - 10x + 9 = 0$	$= (-10)^2 - 4.2.9$ $= 100 - 72$ $= 28$	$b^2 - 4ac > 0$ এবং পূর্ণবর্গ সংখ্যা নয়।	বাস্তব, অসমান ও অমূলদ।
2	$7x^2 - x + 2 = 0$			
3	$-5 + 7x + 6x^2 = 0$			
4	$-2x + 5 - 3x^2 = 0$			
5	$-14x + x^2 + 49 = 0$			
6		$= (-5)^2 - 4.3.4$ $=$		

আমরা আগেই উল্লেখ করেছি, মধ্যপদ বিস্তৃতির মাধ্যমে $x^2 - 7x - 10 = 0$ সমীকরণটির সমাধান করা সহজ নয়। চলো এখন সাধারণ পদ্ধতি ব্যবহার করে এই সমীকরণটি সমাধান করি।

সমস্যা: $x^2 - 7x - 10 = 0$ সমীকরণটির সমাধান করো।

সমাধান: $x^2 - 7x - 10 = 0$ কে $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের সাথে তুলনা করলে পাই,

$a = 1, b = -7, c = -10.$

তাহলে,

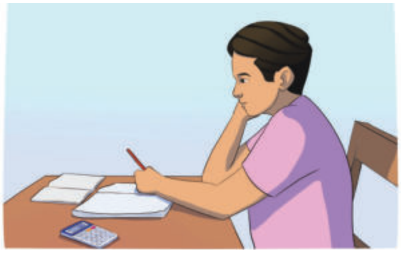
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4.1(-10)}}{2.1} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 40}}{2}$$

$$\therefore x = \frac{7 \pm \sqrt{89}}{2}$$

সুতরাং, সমীকরণের মূল দুইটি: $x_1 = \dfrac{7 + \sqrt{89}}{2}$ এবং $x_2 = \dfrac{7 - \sqrt{89}}{2}$

একক কাজ

তোমার শেখা পদ্ধতিকে কাজে লাগিয়ে নিচের সমীকরণগুলো সমাধান করো। মূলগুলো খালি ঘরে লেখো।



ক্রমিক নং	সমীকরণ	সমীকরণের মূল
1	$3x^2 - 5x + 1 = 0$	
2	$12x^2 - 11x + 2 = 0$	
3	$5x^2 - 8x + 4 = 0$	

লেখচিত্রের সাহায্যে দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান

দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2 + bx + c = 0$ কে লেখচিত্রের মাধ্যমে উপস্থাপন করতে হলে x এর মানের সাথে y এর মানও প্রয়োজন। ধরি, $y = ax^2 + bx + c$. তাহলে x এর যেসব মানের জন্য $y = 0$ হবে অর্থাৎ, লেখচিত্রটি x-অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করবে, x এর ওই সব মানই $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের সমাধান।

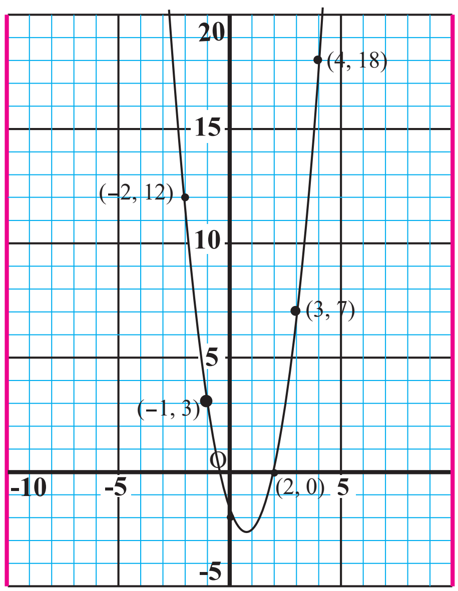
উদাহরণ: $2x^2 - 3x - 2 = 0$ সমীকরণটির লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করো।

সমাধান: মনে করি, $y = 2x^2 - 3x - 2$

x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর মান নির্ণয় করি।

x	–2	–1.5	–1	–0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
y	12	7	3	0	–2	–3	–3	–2	0	3	7	12	18

গ্রাফ কাগজে ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতিবাহুর দৈর্ঘ্যকে উভয় অক্ষে একক ধরে উপরের বিন্দুগুলো স্থাপন করে লেখচিত্রটি অঙ্কন করি।



লক্ষ করা যাচ্ছে যে, লেখচিত্রটি x-অক্ষকে $(-\frac{1}{2}, 0)$ $(2, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে। এই বিন্দু দুইটির x এর মানই প্রদত্ত সমীকরণের সমাধান।

সুতরাং, নির্ণেয় সমাধান: $x_1 = -\frac{1}{2}$ এবং $x_2 = 2$

একক কাজ

সূত্র প্রয়োগ করে $2x^2 - 3x - 2 = 0$ সমীকরণটির সমাধান করো এবং লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করো। তোমার প্রাপ্ত উভয় সমাধান একই হয় কিনা তা যাচাই করো।

একটি বাস্তব সমস্যা ও সমাধান

সমস্যা: সেতুর চাচা হাসান সাহেব একজন ব্যবসায়ী। তিনি একটি পাইকারি দোকান থেকে 50000 টাকা দিয়ে কয়েক প্যাকেট কলম কিনলেন। অন্য একটি দোকানে প্রতি প্যাকেট কলম 2টাকা করে কম পাওয়ায় আগের সমান টাকার কলম কিনলেন এবং তিনি 25 প্যাকেট কলম বেশি পেলেন। হাসান সাহেব প্রথমে কত প্যাকেট কলম কিনেছিলেন এবং প্রতি প্যাকেট কলমের দাম কত ছিল? প্রতি প্যাকেট কলম কত টাকায় বিক্রি করলে তাঁর মোটের উপর 12000 টাকা লাভ হবে?

সমাধান: তোমরা কি সমস্যাটিকে সমীকরণের মাধ্যমে উপস্থাপন করতে পারবে? এসো আমি একটু সাহায্য করি। ধরো, হাসান সাহেব প্রথমে x প্যাকেট কলম কিনেছিলেন। এবার নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর লিখো।

প্রথমে প্রতি প্যাকেট কলমের দাম পড়েছে = ☐ টাকা

পরে প্রতি প্যাকেট কলমের দাম পড়েছে = ☐ টাকা

পরে কলম ক্রয় করেছিলেন = ☐ প্যাকেট

পরে ক্রয়কৃত কলমের মোট ক্রয়মূল্য = ☐ টাকা

পরে ক্রয় করা কলমের মোট দাম= ☐ টাকা

শর্তানুযায়ী,

$$\left(\frac{50000}{x} - 2\right)(x + 25) = 50000$$

বা, $(50000 - 2x)(x + 25) = 50000x$

বা, $50000x - 2x^2 + 50000 \times 25 - 50x = 50000x$

বা, $-2x^2 + 50000 \times 25 - 50x = 0$

বা, $2x^2 + 50x - 50000 \times 25 = 0$

বা, $x^2 + 25x - 25000 \times 25 = 0$

একটি এক চলকবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ। সুতরাং সাধারণ পদ্ধতিতে সমাধান করলে পাওয়া যাবে,

$$x = \frac{-25 \pm \sqrt{(25)^2 - 4 \times (-25000) \times 25}}{2} = \frac{-25 \pm \sqrt{(25)^2 + 4 \times 25000 \times 25}}{2}$$

$$= \frac{-25 \pm 25\sqrt{1 + 4000}}{2}$$

$$= \frac{-25 + 25\sqrt{1 + 4000}}{2}$$ [ধনাত্মক মান নিয়ে, যেহেতু প্যাকেটের সংখ্যা ঋণাত্মক হতে পারে না]

$$= \frac{25 \times (\sqrt{4000} - 1)}{2}$$

≈ 778 (প্রায়)

দুই চলকের একঘাত ও দ্বিঘাত সহসমীকরণ সমাধান

বাস্তবে অনেক সমস্যা আছে যাকে দুই চলকের একঘাত এবং দ্বিঘাত সহসমীকরণে রূপান্তর করে সমাধান করা সহজ হয়। গাণিতিক সমস্যাকে কীভাবে সমাধান করা হয় প্রথমে তার একটি উদাহরণ দেওয়া হলো।

উদাহরণ: নিচের দুই চলকের একঘাত ও দ্বিঘাত একজোড়া সহসমীকরণের সমাধান করো।

$$y = 2x^2 - x - 3$$

$$x - 5y + 13 = 0$$

সমাধান: মনে করি, $y = 2x^2 - x - 3$ ...... (1)

আবার দেওয়া আছে, $x - 5y + 13 = 0$

বা, $x + 13 = 5y$

বা, $5y = x + 13$

বা, $y = \frac{x + 13}{5}$ ....(2)

(1) ও (2) নং হতে লিখা যায়,

$2x^2 - x - 3 = \frac{x + 13}{5}$

বা, $10x^2 - 5x - 15 = x + 13$

বা, $10x^2 - 5x - 15 - x - 13 = 0$

বা, $10x^2 - 6x - 28 = 0$

বা, $2(5x^2 - 3x - 14) = 0$

বা, $5x^2 - 3x - 14 = 0$

বা, $5x^2 - 10x + 7x - 14 = 0$

বা, $5x(x - 2) + 7(x - 2) = 0$

বা, $(x - 2)(5x + 7) = 0$

সুতরাং, $x - 2 = 0$ অথবা $5x + 7 = 0$

বা, $x = 2$ অথবা $x = -\frac{7}{5}$

$x = 2$ হলে, (2) নং সমীকরণ হতে পাই,

$$y = \frac{2 + 13}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

আবার, $x = -\frac{7}{5}$ হলে, (2) নং সমীকরণ হতে পাই,

$$y = \frac{-\frac{7}{5} + 13}{5} = \frac{\frac{-7 + 65}{5}}{5} = \frac{\frac{58}{5}}{5} = \frac{58}{25}$$

নির্ণেয় সমাধান: $(x, y) = (2, 3), \left(-\frac{7}{5}, \frac{58}{25}\right)$

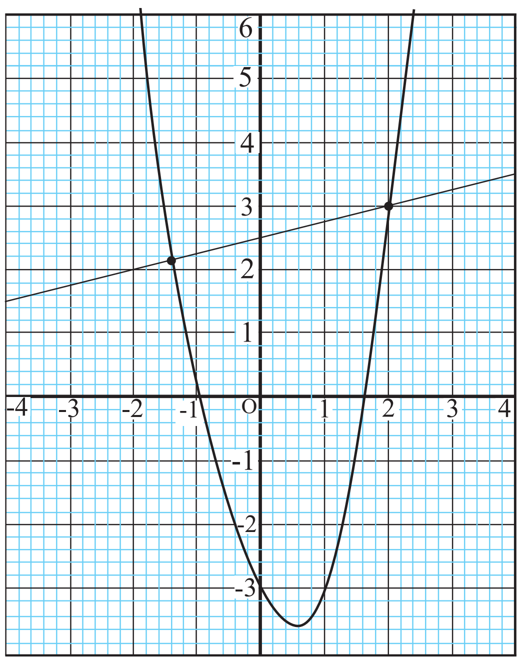
লেখচিত্রের মাধ্যমে সমাধান

দেওয়া সহসমীকরণদ্বয়

$$y = 2x^2 - x - 3$$

$$x - 5y + 13 = 0$$

এখানে, $x - 5y + 13 = 0$ একটি সরল সমীকরণ এবং



$y = 2x^2 - x - 3$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। তোমরা সরল সমীকরণ এবং দ্বিঘাত সমীকরণের লেখচিত্র আঁকা শিখেছ। তোমাদের অভিজ্ঞতাকে কাজে লাগিয়ে একই সমতলে সমীকরণদ্বয়ের লেখচিত্র আঁকো। সমীকরণদ্বয়ের লেখচিত্র পাশে দেওয়া হলো। তোমার আঁকা লেখচিত্রের সাথে পাশের দেওয়া লেখচিত্র মিলিয়ে নাও। লেখচিত্র থেকে লক্ষ করা যাচ্ছে যে, সমীকরণ দুইটি পরস্পর $(2, 3)$ ও $\left(-\frac{7}{5}, \frac{58}{25}\right)$ বিন্দুতে ছেদ করেছে। উভয় পদ্ধতিতে একই সমাধান পাওয়া গেছে। সুতরাং, সমাধানের সঠিকতা যাচাই করা গেল।

দলগত প্রজেক্ট: চাহিদা মোতাবেক সরবরাহের পরিমাণ নির্ণয়

কোনো একটি কারখানাকে লাভজনক করে তুলতে হলে ভোক্তার চাহিদার সমান পন্য উৎপন্ন করতে হয়। এই অবস্থাকে বাজার সাম্যতা (market equilibrium) বলে। কোনো একটি কারখানার উৎপাদিত পন্যের চাহিদা মোতাবেক সরবরাহের সমীকরণ নিচে দেওয়া হলো।

$$q = p^2 - 2p + 44 \quad \ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

$$p - q + 2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \text{(ii)}$$

যেখানে, p পন্যের দাম এবং q পরিমাণ। বাজার সাম্যতার জন্য p এবং q এর মান বের করো।

কাজের নির্দেশনা:

১। একটি পোস্টার পেপার, একটি গ্রাফ কাগজ এবং অন্যান্য প্রয়োজনীয় উপাদান সংগ্রহ করো।

২। বীজগাণিতিক পদ্ধতিতে সমাধান করো। সমাধানের ধাপগুলোর বর্ণনা লেখো।

৩। (i) ও (ii) নং সমীকরণ দুইটির গ্রাফ গ্রাফ কাগজে একই দ্বিমাত্রিক স্থানাঙ্ক অক্ষে উপস্থাপন করো। প্রাপ্ত গ্রাফ দুইটির ছেদবিন্দু নির্ণয় করো।

৪। তোমাদের দলের কাজের পদ্ধতি এবং প্রাপ্ত ফলাফলগুলো একটি পোস্টার পেপারে কিংবা পুরাতন ক্যালেন্ডারের পিছনে সাজিয়ে উপস্থাপন করো। প্রয়োজনে শিক্ষকের সাথে পরামর্শ করো।

৫। তোমাদের দলের ফলাফলের স্বপক্ষে যুক্তি পোস্টার পেপারে লিখে রাখো।

৬। সমাধান মিলিয়ে নাও। [$p = 1, q = 3$ অথবা $p = 2, q = 4$]

জোড়ায় কাজ

শ্রেণি শিক্ষকের নির্দেশ মোতাবেক কয়েকটি দলে বিভক্ত হয়ে নিচের সমীকরণজোট বীজগাণিতিক পদ্ধতিতে সমাধান করো। অতপর লেখচিত্রের মাধ্যমে সমীকরণজোট সমাধান করে প্রমাণ করো যে, উভয়ভাবে প্রাপ্ত সমাধান একই। তোমার দলের কার্যক্রম পোষ্টারে লিখে ক্লাসে উপস্থাপন করো।

$$y = x^2 - x - 2$$

$$x - 2y + 5 = 0$$

অনুশীলনী

1. সহসমীকরণ $a_1x + b_1y = c_1$, $a_2x + b_2y = c_2$ এর সাথে তুলনা করে নিচের ছকের খালি ঘরগুলো পূরণ করো।

ক্রমিক নং	সমীকরণজোট	$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{b_1}{b_2}$	$\frac{c_1}{c_2}$	অনুপাতগুলোর তুলনা	লেখচিত্রে অবস্থান	সমঞ্জস/ অসমঞ্জস	বীজগাণিতিক সিদ্ধান্ত
(i)	$x + 3y = 1$ $2x + 6y = 2$							
(ii)	$2x - 5y = 3$ $x + 3y = 1$							
(iii)	$2x - 4y = 7$ $x - 3y = -2$							
(iv)	$-\frac{1}{2}x - y = 0$ $x - 2y = 1$							

2. নিচের প্রতিজোড়া সমীকরণগুলোর মধ্যে যে গুলো সমাধানযোগ্য তাদের লেখচিত্র এঁকে সমাধান করো এবং অসংখ্য সমাধানের ক্ষেত্রে কমপক্ষে তিনটি সমাধান লেখো।

i) $2x + y = 8$
$2x - 2y = 5$

ii) $2x + 5y = -14$
$4x - 5y = 17$

iii) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 8$
$\frac{5x}{4} - 3y = -3$

iv) $-7x + 8y = 9$
$5x - 4y = -3$

3. প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে সমাধান করো:

i) $7x - 3y = 31$
$9x - 5y = 41$

ii) $(x + 2)(y - 3) = y(x - 1)$
$5x - 11y - 8 = 0$

iii) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$
$ax + by = a^2 + b^2$

iv) $\frac{x}{14} + \frac{y}{18} = 1$
$\frac{x + y}{2} + \frac{3x + 5y}{2} = 2$

v) $p(x + y) = q(x - y) = 2pq$

4. অপনয়ন পদ্ধতিতে সমাধান করো।

i) $3x - 5y = -9$, $5x - 3y = 1$ ii) $\dfrac{x+1}{y+1} = \dfrac{4}{5}$, $\dfrac{x-5}{y-5} = \dfrac{1}{2}$ iii) $2x + \dfrac{3}{y} = 5$, $5x - \dfrac{2}{y} = 3$ iv) $ax + by = 1$, $bx + ay = \dfrac{2ab}{a^2+b^2}$

5. আড়গুণন বা বজ্রগুণন পদ্ধতিতে সমাধান করো।

i) $3x - 2y = 2$, $7x + 3y = 43$ ii) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 8$, $\dfrac{5x}{4} - 3y = -3$ iii) $px + qy = p^2 + q^2$, $2qx - py = pq$ iv) $ax - by = ab$, $bx - ay = ab$

6. অপুর একটি আয়তাকার সবজি বাগান আছে। বাগানটির পরিসীমা 120 মিটার। প্রস্থকে দ্বিগুণ করলে এবং দৈর্ঘ্য থেকে 3 মিটার কমালে পরিসীমা হয় 150 মিটার।

ক) বাগানটি 3 পাশে ঘেরা আছে এবং দৈর্ঘ্য বরাবর এক পাশে ফাঁকা আছে। ফাঁকা পাশ বেড়া দিয়ে ঘিরে দিতে প্রতি মিটার 10 টাকা হিসাবে মোট কত টাকা খরচ হবে?

খ) যদি প্রতি বর্গমিটারে জৈবিক সারের জন্য 7 টাকা খরচ হয়, তাহলে সার বাবদ অপুর মোট কত টাকা খরচ হবে?

7. $x^2 - 3$ সমীকরণের মূলের প্রকৃতি নির্ণয় করো এবং সমাধান করো।

8. $3x^2 - 2x - 1 = 0$ সমীকরণটি সূত্রের সাহায্যে সমাধান করো। আবার সমীকরণটি লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করে দেখাও যে, উভয় পদ্ধতিতে একই সমাধান পাওয়া যায়।

9. সেতুর মা বাড়িতে হাঁস ও মুরগী পালন করে। তিনি 5000 টাকা দিয়ে 25টি হাঁসের বাচ্চা এবং 30টি মুরগীর বাচ্চা কিনলেন। যদি তিনি একই দরে 20 টি হাঁসের বাচ্চা এবং 40টি মুরগীর বাচ্চা কিনতেন তবে তাঁর 500 টাকা কম খরচ হত।

ক) একটি হাঁসের বাচ্চা ও একটি মুরগীর বাচ্চার দাম কত?

খ) কিছুদিন লালনপালনের পরে প্রতিটি হাঁস 250 টাকা এবং প্রতিটি মুরগী 160 টাকা দরে বিক্রি করলে তাঁর মোট কত টাকা লাভ হবে?

10. নিচের সহসমীকরণের সমাধান করো:

$y = x^2 - 2x - 3$

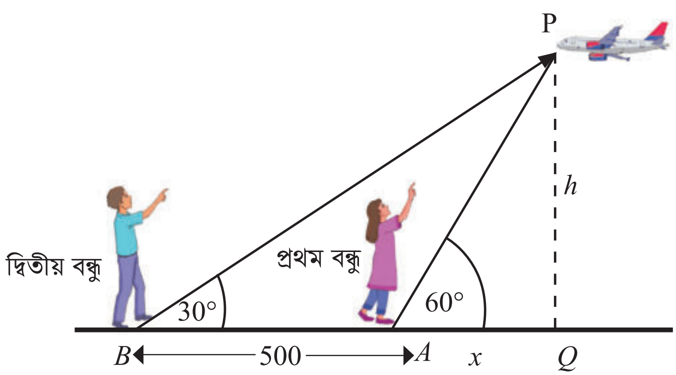
$x - 3y + 1 = 0$

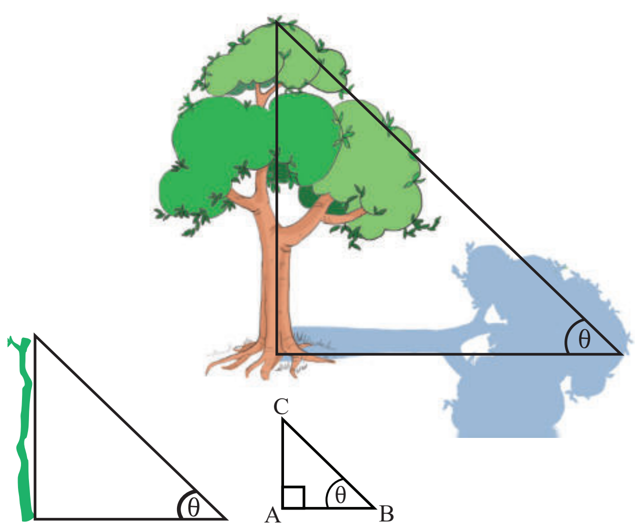
11. নিজের মতো করে দুই চলকবিশিষ্ট 3 সেট (একটি সরল ও একটি দ্বিঘাত) সহসমীকরণ গঠন করো এবং সমাধান করো।

পরিমাপে ত্রিকোণমিতি

এই অভিজ্ঞতায় শিখতে পারবে-

- ত্রিকোণমিতির ধারণা
- ত্রিকোণমিতিক অনুপাত
- বিভিন্ন ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান
- উন্নতি ও অবনতি কোণ
- দূরত্ব ও উচ্চতা বিষয়ক বাস্তব সমস্যা ও সমাধান





পরিমাপে ত্রিকোণমিতি

ধরো, কোনো এক বিকেলে অভি, মিতা ও রিনা গাছের ছায়ায় বসে শ্রেণির পড়া নিয়ে আলোচনা করছিল। মিতা, অভিকে জিজ্ঞাসা করল, আচ্ছা তুমি কি এই গাছের উচ্চতা বলতে পারবে?

অভি বলল: হ্যা, এখুনি আমি গাছে উঠে উচ্চতা মেপে দিচ্ছি।

রিনা সাথে সাথে বলল: গাছে উঠতে পারবে না। গাছে না উঠেই কীভাবে উচ্চতা মাপা যায়, এসো তা বের করার চেষ্টা করি।

মিতা বলল: গাছের একটা ছায়া পড়েছে। দেখো তো ছায়া মেপে গাছের উচ্চতা মাপার কোনো বুদ্ধি বের করা যায় কিনা?

অভি বলল: আসলে ছায়াটি গাছটির সাথে সমকোণে অবস্থান করছে। তাহলে, ছায়ার প্রান্ত বিন্দু থেকে গাছের শীর্ষবিন্দুতে একটি রেখা কল্পনা করলে একটি সমকোণী ত্রিভুজ পাওয়া যাবে। এটি কি কোনো কাজে লাগতে পারে?

রিনা বলল: হ্যা, পিথাগোরাসের উপপাদ্য ব্যবহার করা যেতে পারে।

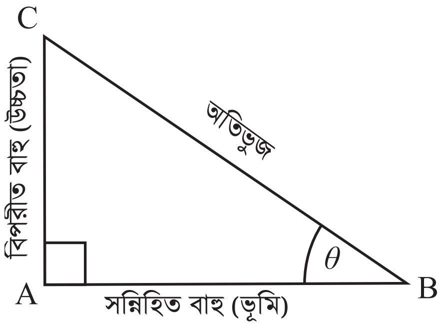
মিতা বলল: পিথাগোরাসের উপপাদ্যের সাহায্যে সমকোণী ত্রিভুজের যে কোনো দুই বাহুর দৈর্ঘ্য জানা থাকলে তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য বের করা যায়। এখানে গাছের ছায়ার দৈর্ঘ্য অর্থাৎ ভূমি পরিমাপ করা যাবে। কিন্তু অতিভুজের দৈর্ঘ্য মাপতে না পারলে তো আর গাছের উচ্চতা বের করা যাবেনা। সুতরাং আমাদের নিশ্চয় নতুন কোনো সূত্রের সন্ধান করতে হবে। চলো আগামীকাল গণিত শিক্ষকের সাথে বিষয়টি আলোচনা করি এবং দেখি নতুন কিছু খুঁজে পাওয়া যায় কিনা।

পরের দিন গণিত শিক্ষককে অভি জিজ্ঞাসা করল, স্যার, আমরা গাছে না উঠেও কি গাছের উচ্চতা মাপতে পারি? তখন শিক্ষক বললেন, তোমরা ত্রিকোণমিতির কয়েকটি ক্লাস মনোযোগ দিয়ে করো, তাহলেই পরবর্তীতে তোমাদের সমস্যাটি সমাধান করতে পারবে।

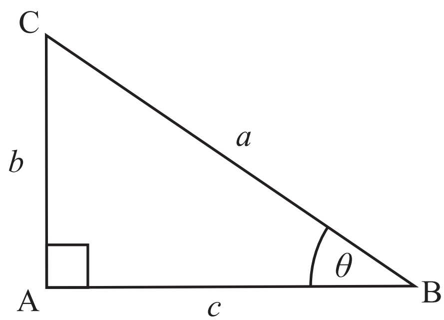
১. ত্রিকোণমিতির ধারণা

পরিমাপের ক্ষেত্রে সমকোণী ত্রিভুজ গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করে। সমকোণী ত্রিভুজের তিনটি বাহুর মধ্যে একটি বিশেষ সম্পর্ক তোমরা পূর্বের শ্রেণিতে খুঁজে পেয়েছিলে। আর তা হলো, অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান। সম্পর্কটি তৈরি হয়েছিল শুধু বাহুর মাধ্যমে। কিন্তু সমকোণী ত্রিভুজের তিনটি বাহু এবং তিনটি কোণ রয়েছে। বাহু এবং কোণ ব্যবহার করেও বিভিন্ন সম্পর্ক তৈরি করা যায় এবং সেটি বাস্তব জীবনে বিভিন্ন কাজে ব্যবহার করা যায় । ত্রিভুজের কোণ এবং বাহুর অনুপাত ব্যবহার করে প্রাচীনকালেও মানুষ বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করেছে। যেমন, গাছে না উঠেও কীভাবে গাছের উচ্চতা মাপা যায়, নদীর এক তীরে দাঁড়িয়ে কীভাবে নদীর প্রস্থ মাপা যায় ইত্যাদি। এসব গাণিতিক কৌশলের উপর ভিত্তি করে ত্রিকোণমিতি (Trigonometry) নামে সৃষ্টি হয়েছে গণিতের এক বিশেষ শাখা। আর Trigonometry শব্দটি গ্রিক শব্দ tri (অর্থ তিন), gon (অর্থ ধার) ও metron (অর্থ পরিমাপ) দ্বারা গঠিত। মিশরীয় ভূমি জরিপ ও প্রকৌশল কাজে ত্রিকোণমিতি ব্যবহার করত বলে ধারণা করা হয়। ত্রিভুজ সংক্রান্ত সমস্যা সমাধানসহ গণিতের বিভিন্ন শাখায় ত্রিকোণমিতির ব্যবহার রয়েছে।

২. সমকোণী ত্রিভুজের বিভিন্ন বাহু ও কোণের পরিচিতি



সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণের বিপরীত বাহু **অতিভুজ** (hypotenuse)। সমকোণী ত্রিভুজে সমকোণ ব্যতীত দুটি সূক্ষ্মকোণ রয়েছে। সূক্ষ্মকোণ দুটি উভয়ই অতিভুজ সংলগ্ন। অতিভুজ সংলগ্ন বাহু দুটির একটিকে **ভূমি** এবং অন্যটিকে **উচ্চতা** বলে। ভূ-সমান্তরালে যে বাহুটি থাকে সেটি ভূমি এবং ভূ-সমান্তরালের সাথে উল্লম্বভাবে যে বাহুটি থাকে সেটি উচ্চতা। কিন্তু খেয়াল রাখবে, ত্রিভুজটিকে ঘুরিয়ে লম্বকে ভূ-সমান্তরালে নিয়ে আসলে আমরা কিন্তু তাকেই ভূমি ধরবো এবং অন্যটিকে উচ্চতা ধরবো। ফলে ত্রিভুজের ভিন্ন অবস্থানের কারণে বাহুগুলোর নামের পরিবর্তন হবে। এটা আমাদের কাজের জন্যও একটা সমস্যা। ফলে নির্দিষ্ট কোণের সাপেক্ষে বাহুগুলোর নামকরণ করে নিলে আমাদের আর কোনো সমস্যা থাকবে না। ধরো, ভূমি এবং অতিভুজ সংলগ্ন কোণের সাপেক্ষে বাহুগুলোর নামকরণ করতে চাই। তাহলে, ভূমিকে **সন্নিহিত বাহু** (adjacent side), উচ্চতাকে **বিপরীত বাহু** (opposite side) হিসেবে বিবেচনা করতে পারি।



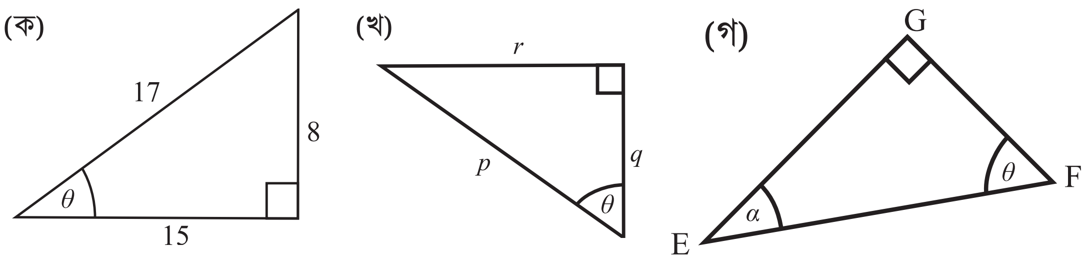
জ্যামিতিক চিত্রে শীর্ষবিন্দুগুলো চিহ্নিত করার জন্য বড়ো হাতের বর্ণ (যেমন, A, B, C ইত্যাদি) এবং বাহু চিহ্নিত করার জন্য ছোটো হাতের বর্ণ (যেমন, a, b, c ইত্যাদি) ব্যবহার করা হয়। সাধারণতঃ, শীর্ষ বিন্দুতে ব্যবহৃত বড়ো হাতের বর্ণকে বিপরীত বাহুর জন্য ছোটো হাতের বর্ণ হিসেবে ব্যবহার করা হয়। কোণ নির্দেশের জন্য সাধারণত গ্রীক বর্ণ ব্যবহার করা হয়। প্রাচীন গ্রীসের গণিতবিদগণের হাত ধরেই জ্যামিতি ও ত্রিকোণমিতিতে এই বর্ণগুলো ব্যবহৃত হয়ে আসছে। ব্যবহৃত বর্ণগুলোর কয়েকটি নিচে দেয়া হলো।

কোণ	α	β	γ	θ	δ
নাম	আলফা (alpha)	বিটা (beta)	গামা (gamma)	থেটা (theta)	ডেল্টা (delta)

উপরের চিত্রে $\angle ABC$ কে θ দ্বারা চিহ্নিত করা হয়েছে।

একক কাজ

নিচের চিত্রগুলো থেকে θ এবং α কোণের সাপেক্ষে অতিভুজ, বিপরীত বাহু এবং সন্নিহিত বাহু চিহ্নিত করো।



সমকোণী ত্রিভুজের নাম	সূক্ষ্মকোণ	অতিভুজ	বিপরীত বাহু	সন্নিহিত বাহু
ক	θ	17		
খ	θ			
গ	θ			
গ	α	EF		

৩. সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও সন্নিহিত বাহুর অন্তর্বর্তী কোণের সাপেক্ষে বিভিন্ন বাহুর অনুপাত

জোড়ায় কাজ

প্রত্যেকে খাতায় একটি সমকোণী ত্রিভুজ আঁকো যার বাহু তিনটির দৈর্ঘ্য তোমার ইচ্ছেমতো নিতে পার, কিন্তু ভূমি সংলগ্ন সূক্ষ্মকোণটি হতে হবে $30°$. ত্রিভুজটি আঁকা হয়ে গেলে রুলার/স্কেল দিয়ে এদের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য পরিমাপ করো এবং নিচের ছকটি পূরণ করো।

(১) সন্নিহিত বাহু	(২) বিপরীত বাহু	(৩) অতিভুজ	(৪) সন্নিহিত বাহু / অতিভুজ	(৫) বিপরীত বাহু / অতিভুজ	(৬) সন্নিহিত বাহু / বিপরীত বাহু	(৭) বিপরীত বাহু / সন্নিহিত বাহু	(৮) অতিভুজ / সন্নিহিত বাহু	(৯) অতিভুজ / বিপরীত বাহু

৪ নং থেকে ৯ নং ঘরের অনুপাত ৬টি তোমার অন্যান্য সহপাঠীর সাথে মিলিয়ে দেখো যে এগুলো মিলে গেছে নাকি পৃথক হয়েছে। অবশ্যই মিলে গেছে। উপরের কাজ থেকে তোমরা কিছু লক্ষ করলে কি?

তোমরা সবাই একটি সমকোণী ত্রিভুজের $30°$ সূক্ষ্মকোণের সাপেক্ষে বাহুগুলোর অনুপাত বের করেছ এবং বাহুগুলোর পরিমাপ বিভিন্ন হওয়া সত্ত্বেও অনুপাত একই হয়েছে।

একইভাবে তোমরা যদি একটি সমকোণী ত্রিভুজের **যে কোনো** সূক্ষ্মকোণের সাপেক্ষে বাহুগুলোর অনুপাত বের করো, তাহলে দেখতে পাবে বাহুগুলোর পরিমাপ বিভিন্ন হওয়া সত্ত্বেও অনুপাত একই হয়েছে। এই পরীক্ষণ থেকে আমরা বলতে পারি,

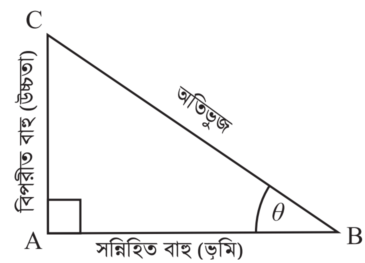
যে কোনো আকারের সমকোণী ত্রিভুজের সন্নিহিত বাহু ও **অতিভুজের অন্তর্বর্তী কোণের মান একই হলে ওই সকল সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলোর অনুপাত পারস্পরিকভাবে সমান হয়।** কিন্তু সন্নিহিত বাহু ও অভিভুজের অন্তর্বর্তী কোণের মান ভিন্ন হলে অনুপাত ভিন্ন হয়।

৪. নির্দিষ্ট কোণের সাপেক্ষে বিভিন্ন অনুপাতের নামকরণ

সমকোণী ত্রিভুজের একটি নির্দিষ্ট সূক্ষ্মকোণের সাপেক্ষে বাহুগুলোর অনুপাত সবসময় একই হয়। সুতরাং একটি নির্দিষ্ট কোণের জন্য বাহুগুলোকে ব্যবহার করে যত রকমের অনুপাত তৈরি করা যায় তা আমরা প্রথমে বের করে নিই। এক্ষেত্রে আমাদের আছে তিনটি বাহু: বিপরীত বাহু, সন্নিহিত বাহু ও অতিভুজ। তিনটি বাহুর যে কোনো দুটিকে ব্যবহার করে কতগুলো অনুপাত তৈরি করা যায়, তা কি তোমরা জানো? একটু চিন্তা করে দেখো, ছয়টি অনুপাত তৈরি করা যাবে। এই ছয়টি অনুপাত নিম্নরূপ।

$\frac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{অতিভুজ}}$	$\frac{\text{অতিভুজ}}{\text{বিপরীত বাহু}}$	$\frac{\text{সন্নিহিত বাহু}}{\text{অতিভুজ}}$	$\frac{\text{অতিভুজ}}{\text{সন্নিহিত বাহু}}$	$\frac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{সন্নিহিত বাহু}}$	$\frac{\text{সন্নিহিত বাহু}}{\text{বিপরীত বাহু}}$

এই ছয়টি অনুপাতকে গণিতবিদগণ ছয়টি নাম দিয়েছেন। যদি অতিভুজ ও ভূমি সংলগ্ন সূক্ষ্মকোণ θ দ্বারা চিহ্নিত করা হয়, তবে অনুপাত ৬টি হলো $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$, $\csc\theta$, $\sec\theta$ এবং $\cot\theta$. এই ছয়টি অনুপাত বাহুর সাথে যে সম্পর্ক তৈরি করে, তা নিম্নরূপ।



$\sin\theta = \frac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{AC}{BC}$	$\cos\theta = \frac{\text{সন্নিহিত বাহু}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{AB}{BC}$	$\tan\theta = \frac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{সন্নিহিত বাহু}} = \frac{AC}{AB}$
$\csc\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{বিপরীত বাহু}} = \frac{BC}{AC}$	$\sec\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{সন্নিহিত বাহু}} = \frac{BC}{AB}$	$\cot\theta = \frac{\text{সন্নিহিত বাহু}}{\text{বিপরীত বাহু}} = \frac{AB}{AC}$

এই অনুপাতগুলোকে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত (Trigonometric Ratio) বলা হয়। সাধারণত ত্রিকোণোমিতিক অনুপাতগুলোর নাম সংক্ষিপ্তরূপে লেখা হয়ে থাকে। এদের পূর্ণ নাম নিম্নরূপ।

পূর্ণনাম	**sine**	**cosine**	**tangent**	**cotangent**	**secant**	**cosecant**
সংক্ষিপ্ত রূপ	sin	cos	tan	cot	sec	csc

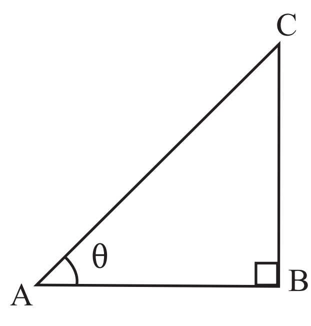
জোড়ায় কাজ

ত্রিকোণমিতিক অনুপাত পর্যবেক্ষণ করে দেখো, $\sin\theta$ ও $\cos\theta$ দিয়ে বাকি সবগুলো অনুপাতকে প্রকাশ করা যায়। নিচের ছকে ২টি উদাহারণ করে দেয়া হয়েছে। বাকি সম্পর্কগুলো তোমরা চিন্তা করে বের করে ছকে লেখো।

$\csc\theta, = \dfrac{\text{অতিভুজ}}{\text{বিপরীত বাহু}} = \dfrac{1}{\dfrac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{অতিভুজ}}} = \dfrac{1}{\sin\theta}$
$\tan\theta, = \dfrac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{সন্নিহিত বাহু}} = \dfrac{\dfrac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{অতিভুজ}}}{\dfrac{\text{সন্নিহিত বাহু}}{\text{অতিভুজ}}} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$
$\sec\theta = ?$
$\cot\theta = ?$

৫. বিভিন্ন কোণের সাপেক্ষে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান

৫.১. 45° কোণের সাপেক্ষে



ধরো, $\triangle ABC$ একটি সমকোণী ত্রিভুজ, $\angle B = 1$ সমকোণ। এবং $\angle A = 45°$।

সুতরাং $\angle C = 45°$ [$\because$ ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ]

তাহলে, $AB = BC$ [$\because$ ত্রিভুজের সমান সমান কোণের বিপরীত বাহুগুলো পরস্পর সমান]

ধরো, $AB = BC = a$

পিথাগোরাসের উপপাদ্যের সাহায্যে আমরা পাই,

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

$\therefore AC = \sqrt{2}a$

সুতরাং, $\sin 45° = \sin A = \dfrac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{অতিভুজ}} = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{a}{\sqrt{2}a} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

একইভাবে, $\cos 45° = \cos A = \dfrac{\text{সন্নিহিত বাহু}}{\text{অতিভুজ}} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{a}{\sqrt{2}a} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

জোড়ায় কাজ

নিচের ছকে প্রদত্ত ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান নির্ণয় করো। একটি করে দেয়া আছে।

$\csc 45° = \dfrac{1}{\sin 45°} = \dfrac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$
$\tan 45° = ?$
$\sec 45° = ?$
$\cot 45° = ?$

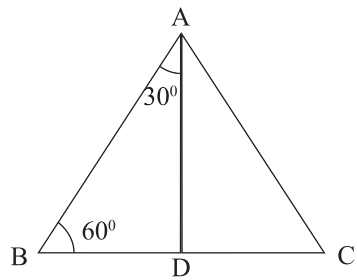
৫.২. 30° ও 60° কোণের সাপেক্ষে

চিত্রে $\triangle ABC$ একটি সমবাহু ত্রিভুজ। $\therefore \angle A = \angle B = \angle C = 60°$ [সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেকটি কোণ 60°]

A থেকে BC এর উপর AD লম্ব আঁকো। তাহলে D বিন্দু BC কে সমান দুই ভাগে ভাগ করবে, সুতরাং, BD = CD. আবার AD রেখা $\angle BAC$ কে সমান দুই ভাগে ভাগ করবে, সুতরাং $\angle BAD = \angle CAD = 30°$

ধরি, $AB = 2a$. সুতরাং, $BD = \dfrac{1}{2}.BC = \dfrac{1}{2}.2a = a$ এবং

$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3}a$



সুতরাং আমরা লিখতে পারি,

$\cos 30° = \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{\sqrt{3}a}{2a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60° = \dfrac{BD}{AB} = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2}$

জোড়ায় কাজ

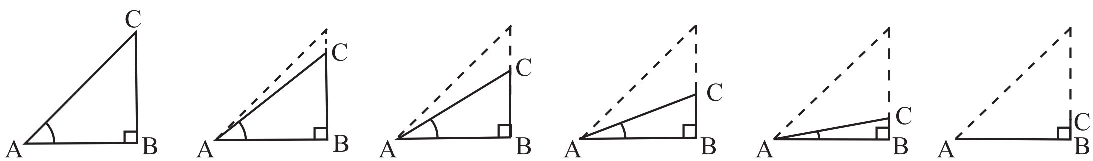
তোমাদের খাতায় নিম্নবর্ণিত ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর মান নির্ণয় করে শিক্ষককে দেখাও।

$\sin 30°$, $\sin 60°$, $\tan 30°$, $\tan 60°$, $\sec 30°$, $\sec 60°$, $\csc 30°$, $\csc 60°$, $\cot 30°$, $\cot 60°$

৫.৩. $\theta°$ কোণের সাপেক্ষে

আমরা 30°, 45° ও 60° কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত বের করতে শিখেছি। চলো আমরা কোণের মান $\theta°$ বা 90° হলে ত্রিভুজের আকৃতি কেমন হবে এবং সেক্ষেত্রে অনুপাতের মান কীভাবে বের করা যাবে সেই বিষয়গুলো নিয়ে একটু ভাবি।

ধরো, $\triangle ABC$ একটি সমকোণী ত্রিভুজ। ত্রিভুজটির $\angle A$ কোণের মান ক্রমশ ছোটো হতে থাকলে BC এর দৈর্ঘ্য ক্রমশ ছোটো হতে থাকবে। এক্ষেত্রে $\angle A$ এর মান যতই শূন্যের কাছাকাছি হবে BC এর দৈর্ঘ্য ততই শূন্যের কাছাকাছি হবে।



তখন, $\triangle ABC$ এ $\sin A = \dfrac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{অতিভুজ}} = \dfrac{BC}{AC}$ এর মানও 0 এর কাছাকাছি হবে। এক্ষেত্রে AC এর দৈর্ঘ্য প্রায় AB এর সমান হবে। তখন, $\cos A = \dfrac{\text{সন্নিহিত বাহু}}{\text{অতিভুজ}} = \dfrac{AB}{AC}$ এর মান প্রায় 1 হবে।

এই ধারণাটি আমাদেরকে $A = 0°$ এর ক্ষেত্রে $\sin A$ এবং $\cos A$ কে সংজ্ঞায়িত করতে সাহায্য করে এবং তখন আমরা লিখি

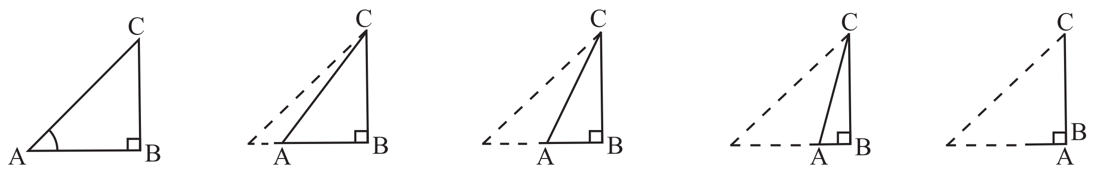
$$\sin 0° = 0 \text{ এবং } \cos 0° = 1$$

একক কাজ

$\sin 0°$ এবং $\cos 0°$ এর মান ব্যবহার করে $\tan 0°$, $\cot 0°$, $\sec 0°$ এবং $\csc 0°$ এর মান বের করো।

৫.৪. 90° কোণের সাপেক্ষে

আবার, $\triangle ABC$ এ $\angle A$ কোণের মান ক্রমশ বড়ো হতে থাকলে AB এর দৈর্ঘ্য ক্রমশ ছোটো হতে থাকবে।



এক্ষেত্রে $\angle A$ এর মান যতই 90° এর কাছাকাছি হবে AB এর দৈর্ঘ্য ততই শূন্যের কাছাকাছি হবে এবং তখন $\triangle ABC$ এ $\cos A = \dfrac{\text{সন্নিহিত বাহু}}{\text{অতিভুজ}} = \dfrac{AB}{AC}$ এর মানও শূন্যের কাছাকাছি হবে। এক্ষেত্রে AC এর দৈর্ঘ্য প্রায় BC এর সমান হবে। তখন, $\sin A = \dfrac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{অতিভুজ}} = \dfrac{BC}{AC}$ এর মান প্রায় 1 হবে।

এই ধারণাটি আমাদেরকে $A = 90^\circ$ এর ক্ষেত্রে $\cos A$ এবং $\sin A$ কে সংজ্ঞায়িত করতে সাহায্য করে এবং তখন আমরা লিখি

$$\cos 90^\circ = 0 \text{ এবং } \sin 90^\circ = 1$$

একক কাজ

$\sin 90^\circ$এবং $\cos 90^\circ$ এর মান ব্যবহার করে $\tan 90^\circ$, $\cot 90^\circ$, $\sec 90^\circ$ এবং $\csc 90^\circ$ এর মান বের করো।

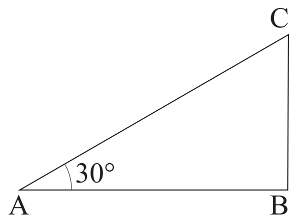
ইতোমধ্যে আমরা যেসকল কোণের অনুপাতের মান বের করেছি সেগুলো আমরা ছক আকারে নিচের মতো করে লিখতে পারি।

অনুপাত \ θ°	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	অসংজ্ঞায়িত
cot	অসংজ্ঞায়িত	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

sec	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	অসংজ্ঞায়িত
csc	অসংজ্ঞায়িত	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

উপরের সারণি ব্যবহার করে আমরা অনেক সমস্যার সমাধান করতে পারি।

সমস্যা: সমকোণী ত্রিভুজ $\triangle ABC$ এ $\angle A = 30°$, $\angle B = 90°$ এবং AB বাহুর দৈর্ঘ্য 7cm. BC ও AC বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।



সমাধান: $\triangle ABC$ হতে আমরা পাই, $\tan A = \frac{BC}{AB}$

$$\therefore \tan 30° = \frac{BC}{7} \implies \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{BC}{7} \implies BC = \frac{7}{\sqrt{3}} = 4.04 \text{ cm (প্রায়)}$$

আবার, $\cos A = \frac{AB}{AC}$

$$\therefore \cos 30° = \frac{7}{AC} \implies \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7}{AC} \implies AC = \frac{14}{\sqrt{3}} = 8.08 \text{ cm (প্রায়)}$$

দলগত কাজ

উপরের সমস্যাটির মতো একটি করে সমস্যা তৈরি করো এবং তোমার একজন সহপাঠীকে সমাধান করতে দাও। সকলের সমাধান শিক্ষককে দেখাও।

৬. বিভিন্ন কোণের সাপেক্ষে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয়ে ক্যালকুলেটরের ব্যবহার

সমকোণী ত্রিভুজের নিয়ম ব্যবহার করে তোমরা কিছু নির্দিষ্ট কোণের সাপেক্ষে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করেছ। যে কোনো কোণের সাপেক্ষে ত্রিকোণমিতিক কোণের অনুপাত নির্ণয় করা কঠিন। সৌভাগ্যক্রমে আমাদের হাতের কাছে বর্তমানে বৈজ্ঞানিক ক্যালকুলেটর, কম্পিউটার বা অন্যান্য ডিভাইস রয়েছে যার মাধ্যমে আমরা যে কোনো কোণের সাপেক্ষে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান বের করতে পারি। ঐসব ক্ষেত্রে আমরা কোণের মানের জন্য যে অনুপাতটি প্রয়োজন হবে তা বৈজ্ঞানিক ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে বের করে নিতে পারবো। তোমাদের অনুশীলনের জন্য নিচের কোণগুলোর মান ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে বের করো এবং সহপাঠীদের সাথে মিলিয়ে নাও।

জোড়ায় কাজ

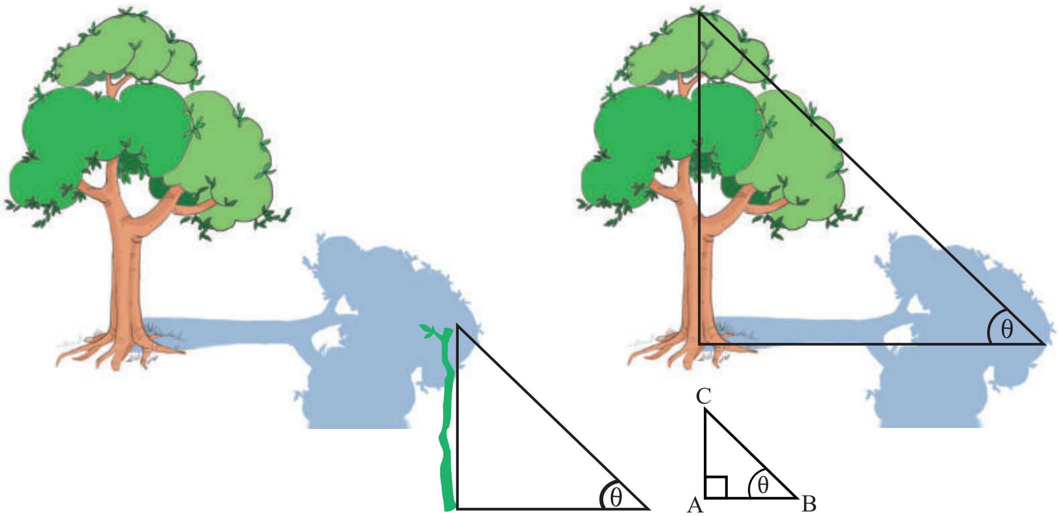
1) শ্রেণি শিক্ষকের সাহায্য নিয়ে বৈজ্ঞানিক ক্যালকুলেটর বা কম্পিউটার ব্যবহার করে $40°$, $55°$, $62°$, $83°$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করো। শিক্ষকের নির্দেশমতো আরও কিছু কোণের মান নির্ণয় করো।

2) $\sin 32°$, $\cos 36°$, $\tan 52°$, $\cot 61.5°$, $\sec 72.6°$, $\csc 15°$ অনুপাতগুলোর মান বের করো।

গণিত শিক্ষক এবার রিনা, অভি ও মিতাকে বললেন, এখন গাছে না উঠেও গাছের উচ্চতা মাপার প্রয়োজনীয় জ্ঞান তোমরা অর্জন করেছ। এসো এবার ক্লাসের সকল শিক্ষার্থী মিলে নিচের কাজটি করো।

দলগত কাজ/প্রজেক্ট

শ্রেণির সকল শিক্ষার্থী কয়েকটি দলে বিভক্ত হবে। প্রত্যেক দল তাদের সুবিধামতো বিভিন্ন দৈর্ঘ্যের একটি কাঠি বা সোজা গাছের ডাল নিবে এবং এর দৈর্ঘ্য মেপে নিবে। যখন সূর্য হেলানো অবস্থায় থাকে, তখন প্রত্যেক দল একটি গাছের পাশে যাবে। এরপর কাঠি/ডালটিকে উল্লম্বভাবে ভূমিতে স্থাপন করে এর ছায়ার দৈর্ঘ্য মেপে নিবে। একই সময়ে গাছের ছায়ার দৈর্ঘ্য মেপে নিবে।



এবার উপরের ছবির মতো খাতায় $\triangle ABC$ আঁকো যেন AC এবং AB এর অনুপাত তোমাদের কাঠির দৈর্ঘ্য এবং কাঠির ছায়ার দৈর্ঘ্য-এর অনুপাতের সমান হয়। অর্থাৎ

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\text{কাঠির দৈর্ঘ্য}}{\text{কাঠির ছায়ার দৈর্ঘ্য}}$$

ধরো, $\angle ABC = \theta$, তাহলে $\tan\theta = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{\text{কাঠির দৈর্ঘ্য}}{\text{কাঠির ছায়ার দৈর্ঘ্য}}$

তোমার কাঠির দৈর্ঘ্য ও ছায়ার দৈর্ঘ্য এখানে বসিয়ে $\tan\theta$ এর মান নির্ণয় করো এবং খাতায় লিখে রাখো।

ধরো, গাছের উচ্চতা h। যেহেতু গাছের ছায়া, গাছের শীর্ষবিন্দু এবং গাছের ছায়ার প্রান্তবিন্দুর সংযোগরেখার সাথে θ কোণ তৈরি করে, সুতরাং

$$\tan\theta = \frac{h}{\text{গাছের ছায়ার দৈর্ঘ্য}}$$

অর্থাৎ,

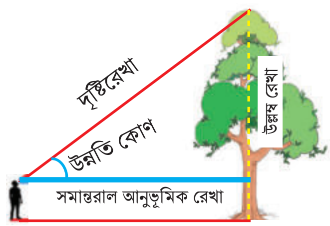
$$h = \tan\theta \times \text{গাছের ছায়ার দৈর্ঘ্য}$$

উপরে তোমাদের নির্ণয় করা $\tan\theta$-এর মান এবং গাছের ছায়ার দৈর্ঘ্য বসিয়ে h-এর মান নির্ণয় করো।

তোমরা যে সকল দল একই গাছের ছায়া মেপেছ, ওই সকল দলের h-এর মান সমান বা কাছাকাছি হবে। কোনো দলের h-এর মান অন্য দলগুলোর মানের সমান বা কাছাকাছি না হলে বুঝতে হবে ওই দলের কাজে ত্রুটি রয়েছে। ওই দলটিকে আবার কাজটি করে দেখতে হবে।

৭. উন্নতি ও অবনতি কোণ

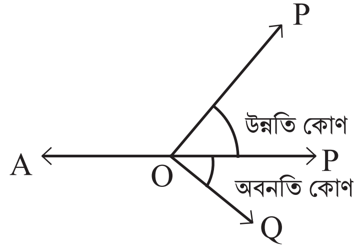
পাশের চিত্রে আমরা লক্ষ করি, একজন ব্যাক্তি গাছের অগ্রভাগ/শীর্ষভাগের দিকে তাকিয়ে আছে। ব্যাক্তির দৃষ্টিরেখা, চোখ বরাবর ভূসমান্তরাল রেখা এবং গাছের মাঝ বরাবর উর্ধ্বরেখা কল্পনা করলে আমরা একটি সমকোণী ত্রিভুজ পাব। এক্ষেত্রে ভূসমান্তরাল রেখা ও চোখের দৃষ্টি বরাবর কল্পিত রেখার মধ্যবর্তী কোণকে **উন্নতি কোণ** বলে। উন্নতি কোণ এবং কল্পিত ত্রিভুজটির যে কোনো এক বাহুর দৈর্ঘ্য জানা থাকলে আমরা ত্রিকোণমিতিক অনুপাত ব্যবহার করে অন্য বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য বের করতে পারব।



এবার পাশের আরেকটি চিত্র লক্ষ করি। একটি শিশু বাসার দোতলার বারান্দা থেকে নিচে একটি বস্তুর দিকে তাকিয়ে আছে। শিশুটির দৃষ্টিরেখা, ভূমির উপর কল্পিত রেখা এবং ভূমি থেকে শিশুটির চোখ বরাবর উর্ধ্বরেখা কল্পনা করলে আমরা একটি সমকোণী ত্রিভুজ কল্পনা করতে পারি। এক্ষেত্রে চোখ বরাবর কল্পিত ভূ-সমান্তরাল রেখা এবং চোখের দৃষ্টি রেখার মধ্যবর্তী কোণকে **অবনতি কোণ** বলে। অবনতি কোণের মান জানা থাকলে কল্পিত ত্রিভুজটির কোণের মান বের করে এবং যে কোনো এক বাহুর দৈর্ঘ্যের মাধ্যমে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত ব্যবহার করে অন্য বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য বের করে ফেলতে পারবো।

৭.১. একটি নির্দিষ্ট রেখার একটি নির্দিষ্ট বিন্দুর সাপেক্ষে উন্নতি ও অবনতি কোণ

ধরো, AB একটি ভূ-সমান্তরাল রেখা। AB এর উপর O একটি বিন্দু। $\angle POB$ এবং $\angle BOQ$ দুটি কোণ অঙ্কন করা হলো যেন A, O, B, P ও Q একই উল্লম্ব তলে অবস্থান করে। এখানে P বিন্দুটি ভূ-সমান্তরাল AB রেখার উপরের দিকে অবস্থিত। সুতরাং AB রেখার O বিন্দুর সাপেক্ষে P বিন্দুর উন্নতি কোণ $\angle POB$ ।



আবার, Q বিন্দুটি ভূ-সমান্তরাল AB রেখার নিচের দিকে অবস্থিত। সুতরাং AB রেখার O বিন্দুর সাপেক্ষে Q বিন্দুর অবনতি কোণ $\angle QOB$ ।

৮. ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয়ের প্রয়োজনীয়তা

গণিত শিক্ষক এবার সকল শিক্ষার্থীকে বললেন যে এতক্ষণে তোমরা বুঝে গিয়েছ ত্রিকোণমিতিক জ্ঞান আমাদের কত কাজে লাগে। কোণ পরিমাপের মাধ্যমে কোনো বস্তুর অবস্থানে না গিয়েও দুরত্ব মাপা যায়। গণিতবিদদের এই আবিষ্কার ছিল একটি বিপ্লব। তাই আমরা এখানে ত্রিকোণমিতির জ্ঞান অর্জনে মনোযোগী হবো। আমরা এই জ্ঞানের মাধ্যমে অনেক কঠিন সমস্যারও সমাধান করতে পারি।

৯. দূরত্ব ও উচ্চতা বিষয়ক বাস্তব সমস্যা ও সমাধান

এ পর্যন্ত যা শিখলাম, চলো সেগুলো ব্যবহার করে আমরা কয়েকটি বাস্তব সমস্যার সমাধান করি।

সমস্যা-১: একটি মই একটি ঘরের ছাদের কিনারে হেলান দিয়ে রাখা হয়েছে। মইটি দৈর্ঘ্য 12 ফুট এবং মইটি ভূমির সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করেছে। ভূমি থেকে ছাদের উচ্চতা নির্ণয় করো।

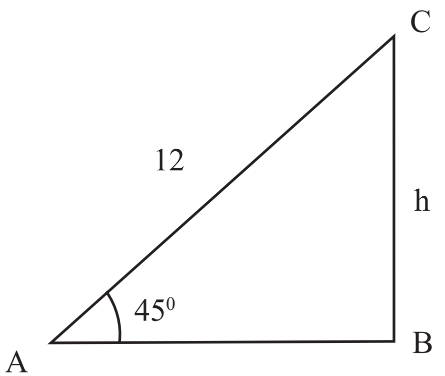
সমাধান: ধরি, AC মইটির শীর্ষবিন্দু C এবং C বিন্দুটি ছাদের কিনারে রয়েছে। সুতরাং C বিন্দু থেকে ভূমির উপর লম্ব দূরত্বই হবে ছাদের উচ্চতা। চিত্রানুযায়ী $BC = h$ (ধরি) ,ছাদের উচ্চতা এবং AC মইটির ভূমি AB এর সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করেছে। তাহলে, $\angle CAB = 45°$. সমকোণী ত্রিভুজ $\triangle ABC$ হতে পাই,

$$\sin 45° = \frac{BC}{AC} = \frac{h}{12}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{h}{12}$$

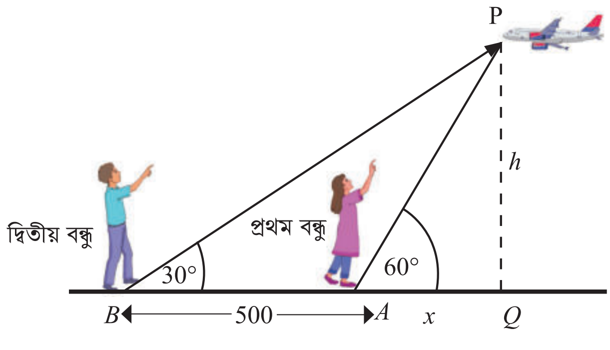
$$\Longrightarrow \sqrt{2}\, h = 12$$

$$\Longrightarrow h = \frac{12}{\sqrt{2}} = 8.49 \text{ ফুট (প্রায়)}$$



সুতরাং দেয়ালটির উচ্চতা 8.49 ফুট (প্রায়)

সমস্যা-২ দুই বন্ধু 500 মিটার দূরত্বে দাঁড়িয়ে আছে এবং তারা দেখলো একটি প্লেন তাদের উপর দিয়ে উড়ে আসছে। কোনো একটি নির্দিষ্ট সময়ে প্রথম বন্ধুর থেকে প্লেনের উন্নতি কোণ $60°$ এবং দ্বিতীয় বন্ধুর থেকে প্লেনের উন্নতি কোণ $30°$. প্লেনটি কত উচ্চতায় উড়ছিল? প্লেনটি যদি দুই সেকেন্ড পরে দ্বিতীয় বন্ধুর মাথার উপর দিয়ে অতিক্রম করে, তাহলে প্লেনের গতিবেগ কত ছিল?



সমাধান: ধরি, প্রথম বন্ধুর অবস্থান A, দ্বিতীয় বন্ধুর অবস্থান B এবং প্লেনের অবস্থান P. ধরি, P থেকে ভূ-সমতলের উপরে লম্বরেখা $PQ = h$ এবং $AQ = x$.

সমকোণী ত্রিভুজ ΔAPQ থেকে পাই, $\tan 60° = \dfrac{h}{x}$

$$\Longrightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{x}$$

$$\Longrightarrow x = \frac{h}{\sqrt{3}} \; \ldots\ldots\ldots \; (1)$$

আবার সমকোণী ত্রিভুজ ΔBPQ থেকে পাই, $\tan 30° = \dfrac{h}{x+500}$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x+500}$$

$$\Longrightarrow x + 500 = h\sqrt{3}$$

$$\Longrightarrow \frac{h}{\sqrt{3}} + 500 = h\sqrt{3}$$ [(1) নং সমীকরণ থেকে x এর মান বসিয়ে]

$$\Longrightarrow h + 500\sqrt{3} = 3h$$

$$\Longrightarrow 2h = 500\sqrt{3}$$

$$\Longrightarrow h = 250\sqrt{3}$$

সুতরাং প্লেনটি $250\sqrt{3}$ মিটার উচ্চতা দিয়ে যাচ্ছে।

(1) নং সমীকরণ থেকে পাই, $x = \dfrac{h}{\sqrt{3}} = \dfrac{250\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 250$

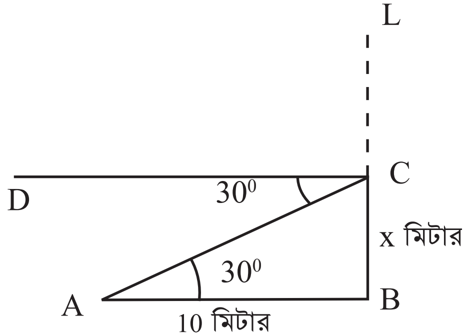
প্লেনটি 2 সেকেন্ডে $500 + 250 = 750$ মিটার দূরত্ব অতিক্রম করে। সুতরাং প্লেনের গতিবেগ $750 \div 2 = 375$ মিটার/সেকেন্ড।

সমস্যা-৩

একটি খুঁটি এমনভাবে ভেঙে গেল যে তার অবিচ্ছিন্ন ভাঙা অংশটি খুঁটির গোড়া থেকে 10 মিটার দূরে মাটি স্পর্শ করে। মাটিতে খুঁটিটির স্পর্শ বিন্দুর অবনতি কোণ 30° হলে, সম্পূর্ণ খুঁটিটির দৈর্ঘ্য কত?

সমাধান:

মনে করি, খুঁটির সম্পূর্ণ দৈর্ঘ্য $BL = h$ মিটার এবং খুঁটিটি $BC = x$ মিটার উচ্চতায় ভেঙে গিয়ে বিচ্ছিন্ন না হয়ে খুঁটির গোড়া থেকে $AB = 10$ মিটার দূরে মাটি স্পর্শ করে। সুতরাং $AC = CL$



এখানে অবনতি কোণ $\angle ACD = 30°$. সুতরাং $\angle BAC = \angle ACD = 30°$ [একান্তর কোণ বলে]।

শর্তানুযায়ী, $AC = BL - BC = (h - x)$ মিটার।

সুতরাং $\triangle ABC$ হতে পাই,

$\tan 30° = \frac{BC}{AB} = \frac{x}{10}$. $\Longrightarrow x = 10 \tan 30° = 10 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}}$ মিটার

আবার, $\cos 30° = \frac{AB}{AC} = \frac{10}{h - x}$

$$\Longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{10}{h - x}$$

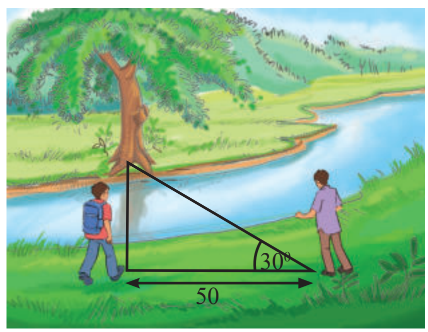
$$\Longrightarrow h - x = \frac{20}{\sqrt{3}}$$

$$\Longrightarrow h = x + \frac{20}{\sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}} + \frac{20}{\sqrt{3}} = \frac{30}{\sqrt{3}} = 17.32 \text{ মিটার।}$$

সুতরাং সম্পূর্ণ খুঁটিটির দৈর্ঘ্য 17.32 মিটার (প্রায়)

জোড়ায় কাজ

একটি নদীর এক পাড়ে দাঁড়িয়ে তোমার থেকে আড়াআড়ি অপর পাড়ে একটি গাছকে লক্ষ করলে। তুমি নদীর পাড় দিয়ে 50 মিটার এমনভাবে হেঁটে গেলে যে ওই গাছটির সাথে তোমার বর্তমান অবস্থানের সংযোগরেখা তোমার চলার পথের সাথে 30° কোণ তৈরি করল। তোমার প্রথম অবস্থান থেকে নদীর ওপারের গাছের দূরত্ব কত?



প্রজেক্ট (দলগত কাজ)

শিক্ষকের নির্দেশনা মোতাবেক তোমরা কয়েকটি দলে ভাগ হয়ে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের জ্ঞান কাজে লাগিয়ে তোমাদের শিক্ষা প্রতিষ্ঠানের আঙিনা বা মাঠ থেকে প্রতিষ্ঠানের সর্বোচ্চ স্থাপনার উচ্চতা নির্ণয় করো। তোমরা উচ্চতা কীভাবে নির্ণয় করলে তা ছবিসহ একটি পোস্টার পেপারে উপস্থাপন করো।

অনুশীলনী

১. $\cos\theta = \frac{3}{4}$ হলে, θ কোণের অন্যান্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলো নির্ণয় করো।

২. $12 \cot\theta = 7$ হলে $\cos\theta$ ও $\csc\theta$ এর মান বের করো।

৩. ΔABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B = 90°$, $AC = 12$ সেমি, $BC = 13$ সেমি এবং $\angle BAC = \theta$ হলে, $\sin\theta$, $\sec\theta$ ও $\tan\theta$ এর মান বের করো।

৪. $\theta = 30°$ হলে, দেখাও যে, (i) $\cos 2\theta = \frac{1 - \tan^2\theta}{1 + \tan^2\theta}$, (ii) $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$.

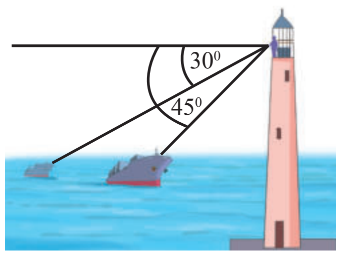
৫. একটি গাছের পাদদেশ হতে 15 মিটার দূরে ভূ-তলের কোনো বিন্দুতে গাছের শীর্ষবিন্দুর উন্নতি কোণ $60°$ হলে, গাছটির উচ্চতা নির্ণয় করো।

৬. 6 মিটার দৈর্ঘ্যের একটি মই ভূমির সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে ছাদ স্পর্শ করে আছে। ছাদের উচ্চতা নির্ণয় করো।

৭. ভূতলের কোনো একটি স্থান থেকে একটি মিনারের শীর্ষবিন্দুর উন্নতি কোণ $60°$ । ওই স্থান থেকে 20 মিটার পিছিয়ে গেলে মিনারের উন্নতি কোণ হয় $45°$। মিনারটির উচ্চতা নির্ণয় করো।

৮. একটি নদীর তীরে দাড়িয়ে একজন লোক দেখলো যে, ঠিক সোজাসুজি নদীর অপর তীরে 100 মিটার উঁচু একটি টাওয়ারের শীর্ষের উন্নতি কোণ $45°$। লোকটি টাওয়ার বরাবর নৌকা পথে যাত্রা শুরু করল। কিন্তু পানির স্রোতের কারণে নৌকাটি টাওয়ার থেকে 10 মিটার দূরে তীরে পৌঁছাল। লোকটির যাত্রা স্থান থেকে গন্তব্য স্থানের দূরত্ব নির্ণয় করো।

৯. সাগরের তীরে একটি টাওয়ারের উপর থেকে একজন লোক সাগর পর্যবেক্ষণের সময় দেখলো যে একটি জাহাজ বন্দরের দিকে আসছে। তখন জাহাজটির অবনতি কোণ ছিল $30°$. কিছুক্ষণ পরে লোকটি দেখলো জাহাজটির অবনতি কোণ $45°$. যদি টাওয়ারের উচ্চতা 50 মিটার হয়, তবে এই সময়ে জাহাজটি কত দূরত্ব অতিক্রম করেছে?

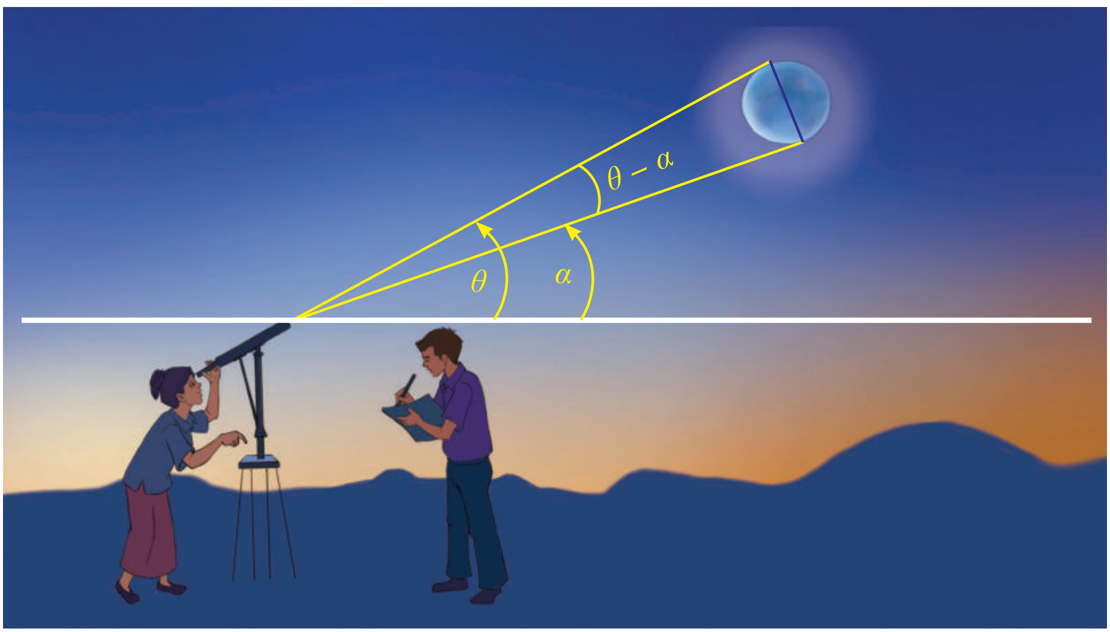


১০. তোমার প্রতিষ্ঠানের অফিস ভবন থেকে 10 মিটার দূরে ওই ভবনের উন্নতি কোণ $45°$ এবং 20 মিটার দূর থেকে ওই ভবনের উন্নতি কোণ $\theta°$ হলে, $\sin\theta$ ও $\cos\theta$-এর মান নির্ণয় করো।

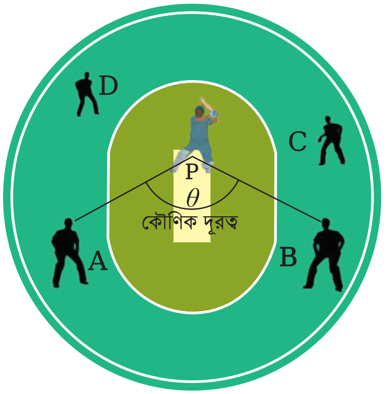
কৌণিক দূরত্ব পরিমাপে ত্রিকোণমিতি

এই অভিজ্ঞতায় শিখতে পারবে-

- ত্রিকোণমিতিক কোণের ধারণা, প্রয়োজনীয়তা এবং পরিমাপের কৌশল
- জ্যামিতিক কোণ ও ত্রিকোণমিতিক কোণের পার্থক্য
- ত্রিকোণমিতিক কোণের আদর্শ অবস্থান এবং তার সাপেক্ষে কোণের পরিমাপ
- কোটার্মিনাল কোণ, কোয়াড্রেন্ট কোণ ও কোয়াড্রেন্টাল কোণের ধারণা ও পরিমাপ
- আদর্শ অবস্থানে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত
- বিভিন্ন কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের আন্তঃসম্পর্ক
- ত্রিকোণমিতি ও স্থানাঙ্ক জ্যামিতির আন্তঃসম্পর্ক
- কোণ-এর রেডিয়ান পরিমাপ এবং ডিগ্রী ও রেডিয়ানের সম্পর্ক

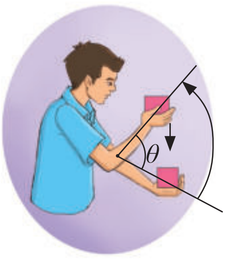


কৌণিক দূরত্ব পরিমাপে ত্রিকোণমিতি

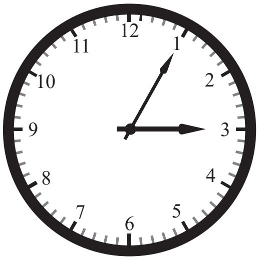


আমরা পূর্বের শ্রেণিতে দুই বস্তুর মধ্যবর্তী সরলরৈখিক দূরত্ব নির্ণয় করা শিখেছি। কিন্তু সরলরৈখিক দূরত্ব ছাড়াও আরেক প্রকার দূরত্ব আছে যাকে কৌণিক দূরত্ব বলে। যেমন, পাশের চিত্রে একটি ক্রিকেট মাঠে কয়েকজন খেলোয়ার দেখা যাচ্ছে। ব্যাটসম্যান P থেকে সরাসরি ফিল্ডার A ও B এর দূরত্ব যথাক্রমে PA ও PB, যাকে সরলরৈখিক দূরত্ব বলে। কিন্তু ব্যাটসম্যান P কে কেন্দ্রে রেখে তার সাপেক্ষে যদি ফিল্ডার A ও B এর দূরত্ব পরিমাপ করতে চাই, তাহলে সেই দূরত্বকে আমরা কৌণিক দূরত্ব বলি। পাশের চিত্রে P এর সাপেক্ষে PA থেকে PB এর অবস্থানের পার্থক্যকে কৌণিক দূরত্ব বলা হয়, যাকে θ দ্বারা চিহ্নিত করা হয়েছে।

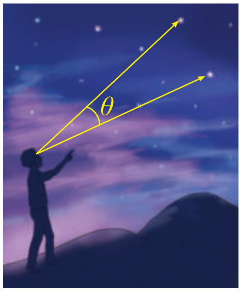
আমরা জেনে বা না জেনেই প্রতিদিন বিভিন্ন কাজে কৌণিক দূরত্ব কাজে লাগাই। যেমন, ক্রিকেট খেলায় একজন ব্যাটসম্যান ফিল্ডারদের কৌণিক দূরত্ব মাথায় রেখে বলে আঘাত করেন এবং রান করেন। আবার হাত দিয়ে কাজ করার সময় আমাদের হাতগুলো সবসময় বিভিন্ন কৌণিক দূরত্বকে কাজে লাগায়। আমাদের দেয়াল ঘড়ির কাঁটাগুলো প্রতিনিয়ত কৌণিক দূরত্ব অতিক্রম করছে। রাতের আকাশে যখন আমরা একটি তারা থেকে আরেকটি তারার দূরত্ব পরিমাপ করি, সেটাও মূলতঃ কৌণিক দূরত্ব। এরকম অসংখ্য উদাহারণ তোমরা পাবে যেখানে কৌণিক দূরত্ব কাজে লাগানো হয়। কোণ পরিমাপের মাধ্যমে আমরা অনেক দূরবর্তী বস্তুর অবস্থান সম্বন্ধে জানতে পারি এবং তাদের আকার, ঘূর্ণন বৈশিষ্ট্য ইত্যাদি নির্ণয় করতে পারি। এই অভিজ্ঞতায় আমরা ত্রিকোণমিতিক কোণ পরিমাপের মাধ্যমে এই ধরনের সমস্যার সমাধান করার চেষ্টা করব।



ক



খ



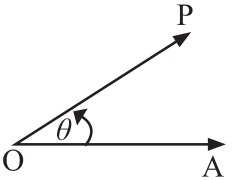
ঘ

জোড়ায় কাজ

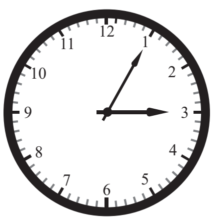
জোড়ায় চিন্তা করে নিচের ছকে তিনটি উদাহারণ লেখো যেখানে কৌণিক দূরত্ব ব্যবহৃত হয়।

কৌণিক দূরত্ব পরিমাপ করার জন্য আমরা ত্রিকোণমিতির জ্ঞানকে কাজে লাগাই। নিচে ধারাবাহিকভাবে এবিষয়ে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে।

১. ত্রিকোণমিতিক কোণের পরিমাপ (Measurement of trigonometric angle)



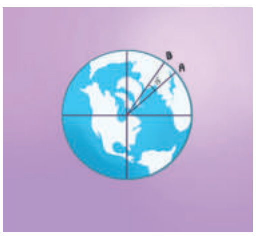
একটি রশ্মি তার প্রারম্ভিক বিন্দুর সাপেক্ষে প্রারম্ভিক অবস্থান থেকে ঘুরে একটি প্রান্তিক অবস্থানে পৌঁছালে একটি কোণ তৈরি হয়। পাশের চিত্র অনুযায়ী ধরি, OA একটি প্রারম্ভিক রশ্মি যা O বিন্দুর সাপেক্ষে ঘুরে OP অবস্থানে পৌছালো। তাহলে, $\angle AOP$ একটি কোণ তৈরি হলো। ধরি, $\angle AOP = \theta$. এখানে O কে **শীর্ষবিন্দু** (vertex), OA কে **আদি রশ্মি বা প্রারম্ভিকরেখা** (initial line), এবং OP কে **প্রান্তিক রশ্মি বা প্রান্তরেখা** (terminal line) বলা হয়। OA রশ্মিকে স্থির রেখে OP রশ্মি O বিন্দুর সাপেক্ষে যে পরিমাণ ঘোরে তাকে **কৌণিক দূরত্ব** (angular distance) বলে। অর্থাৎ θ হলো কৌণিক দুরত্ব। কৌণিক দুরত্ব, পরিমাপের ক্ষেত্রে খুবই গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করে। কৌণিক দুরত্বকে সাধারণত ডিগ্রী দ্বারা পরিমাপ করা হয়। OA রশ্মিকে স্থির রেখে OP রশ্মি O বিন্দুর সাপেক্ষে ঘোরালে বিভিন্ন পরিমাপের কোণ তৈরি হয়। শুরুতে যখন OP রশ্মি OA রশ্মির উপর সমপতিত থাকে তখন কোণটি হবে $0°$. যদি OP রশ্মি O বিন্দুর সাপেক্ষে একবার ঘুরে এসে আবার OA রশ্মির উপর সমপতিত হয়, তখন কোণটি হবে $360°$. অর্থাৎ একটি পূর্ণ ঘূর্ণনকে 360 দ্বারা ভাগ করলে যে কৌণিক দূরত্ব হয়, তাকে $1°$ ধরা হয়। $1°$ কে 60 দ্বারা ভাগ করলে যে কৌণিক দূরত্ব হয়, তাকে $1'$ (1 মিনিট) ধরা হয়। অর্থাৎ $1' = \frac{1}{60} \times 1°$. আবার $1'$ কে 60 দ্বারা ভাগ করলে যে কৌণিক দূরত্ব হয়, তাকে $1''$ (1 সেকেন্ড) ধরা হয়। অর্থাৎ $1'' = \frac{1}{60} \times 1'$. সুতরাং $1'' = \frac{1}{3600} \times 1°$.



তুমি কি লক্ষ করেছ তোমাদের বাসার দেয়াল ঘড়ি বা টেবিল ঘড়ি অথবা তোমার শিক্ষা প্রতিষ্ঠানের দেয়াল ঘড়ির কাঁটাগুলো অনবরত ঘুরছে? কাঁটাগুলো বারবার 12টার উপরে ঘুরে আসছে। যদি ঘড়ির কেন্দ্র থেকে 12 এর দিকে একটি প্রারম্ভিক রশ্মি কল্পনা করি, তাহলে এই কাঁটাগুলো কতটা কৌণিক দূরত্ব অতিক্রম করছে, তুমি কি বলতে পারবে? কাঁটাগুলো একবার ঘুরে 12টার উপর আসলে $360°$ কৌণিক দূরত্ব অতিক্রম করে। আরেকবার একটি পূর্ণ ঘূর্ণন সম্পন্ন করলে $360° + 360° = 720°$ দূরত্ব অতিক্রম করা হবে। এভাবে প্রতিটি পূর্ণ ঘূর্ণন সম্পন্ন করলে $360°$ যোগ হবে। সুতরাং আমরা দেখতে পারছি, কৌণিক দূরত্বের ক্ষেত্রে কোণের পরিমাপ $360°$ এর বেশি হতে পারে। অর্থাৎ, ত্রিকোণমিতিক কোণ $360°$ এর বেশিও হতে পারে।

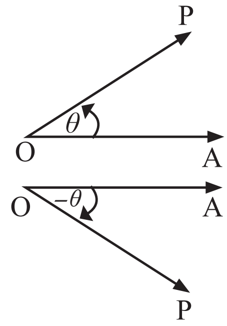
জোড়ায় কাজ

পাশের চিত্রে পৃথিবীর কেন্দ্র থেকে A ও B দুইটি স্থানের কৌণিক দূরত্ব $15°$ হলে স্থান দুইটির কৌণিক দূরত্বকে সেকেন্ডে প্রকাশ করো। নিচের ঘরে উত্তর লেখো।

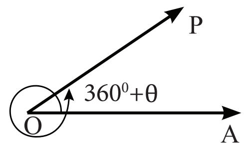


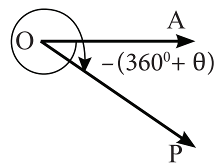
১.১ ধনাত্মক ও ঋণাত্মক কোণ

সংখ্যারাশির ক্ষেত্রে যেমন ধনাত্মক ও ঋণাত্মক সংখ্যা আছে, তেমনি কৌণিক দূরত্বের ক্ষেত্রেও ধনাত্মক ও ঋণাত্মক কোণ আছে। যদি প্রান্তিক রশ্মি OP, প্রারম্ভিক রশ্মি OA এর সাপেক্ষে ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘোরে, তাহলে কোণ θ কে ঋণাত্মক কোণ (negative angle) ধরা হয়, আর যদি প্রান্তিক রশ্মি OP, প্রারম্ভিক রশ্মি OA এর সাপেক্ষে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘোরে, তাহলে কোণ θ কে ধনাত্মক কোণ (positive angle) ধরা হয় । কোণে তীর চিহ্ন ব্যবহার করে ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক নির্দেশ করা হয় এবং সংখ্যারাশির মতো কোণের আগে '–' চিহ্ন দিয়ে ঋণাত্মক কোণ নির্দেশ করা হয়। পাশের চিত্রে ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক কোণ নির্দেশ করা হয়েছে।

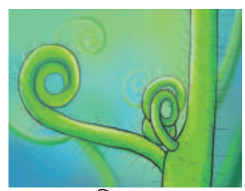


যদি প্রান্তিক রশ্মি OP, ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে অথবা ঘড়ির কাঁটার দিকে 360° এর বেশি ঘোরে, তখন কোণটি 360° এর বেশি হয় এবং আমরা সেটিকে পাশের চিত্রের মতো উপস্থাপন করতে পারি। প্রকৃতিতে বিভিন্ন বস্তুতে 360° এর বেশি কোণ দেখা যায়; যেমন, স্পাইরাল গ্যালাক্সি, লতা জাতীয় গাছের হাত ইত্যাদি। তোমরা কি আরও কিছুর নাম বলতে পারবে যেখানে 360° এর বেশি কোণ উৎপন্ন হয়? চিন্তা করে নিচের ঘরে লেখো।






গ্যালাক্সি

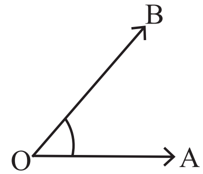

লতা জাতীয় গাছের হাত

জোড়ায় কাজ

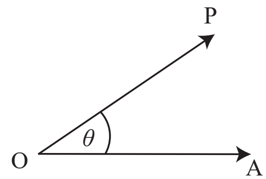
জ্যামিতিক রুলার এবং চাঁদা ব্যবহার করে নিচের খালি জায়গায় 200° এবং –230° কোণ আঁক।

২. জ্যামিতিক ও ত্রিকোণমিতিক কোণ

জ্যামিতি থেকে আমরা জানি যে, দুটি ভিন্ন রশ্মি এক বিন্দুতে মিলিত হলে সেই বিন্দুতে একটি কোণ উৎপন্ন হয়। চিত্রে $\angle AOB$ একটি জ্যামিতিক কোণ। এখানে OA এবং OB রশ্মি দুটি O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। ফলে O বিন্দুতে $\angle AOB$ কোণ তৈরি হয়েছে। $\angle AOB$ কোণ পরিমাপের ক্ষেত্রে সবসময় ধনাত্মক বিবেচনা করা হয়। ফলে জ্যামিতিতে কোণের আলোচনা $0°$ থেকে $360°$ বা চার সমকোণ পর্যন্ত সীমিত রাখা হয়।



অন্যদিকে ত্রিকোণমিতিক কোণের ক্ষেত্রে OA রশ্মিকে স্থির রেখে OP কে O বিন্দুর সাপেক্ষে ঘুরিয়ে বিভিন্ন পরিমাপের কোণ তৈরি করা হয়। ত্রিকোণমিতি কোণ ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক দুই-ই হতে পারে এবং $360°$ এর বেশিও হতে পারে। পাশের চিত্রে $\theta = \angle AOP$ একটি ত্রিকোণমিতিক কোণ। এটি একটি ধনাত্মক কোণ, কারণ OP রেখা প্রারম্ভিক রেখা OA এর সাথে ঘড়ির কাঁটার বিপরিত দিকে ঘুরে θ কোণ তৈরি করেছে।

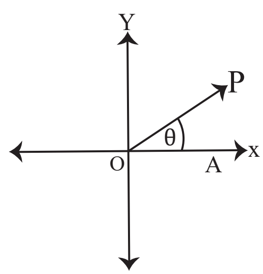


একক কাজ

নিচের খালি জায়গায় $120°$ এর একটি জ্যামিতিক কোণ আঁকো। একই পরিমাপের একটি ধণাত্মক ও একটি ঋণাত্মক ত্রিকোণমিতিক কোণ আঁকো।

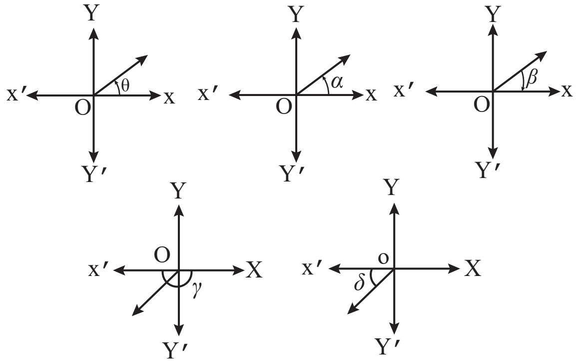
৩. ত্রিকোণমিতিক কোণের আদর্শ অবস্থান (Standard position of trigonometric angle)

যেকোনো ত্রিকোণমিতিক কোণকে আমরা দ্বিমাত্রিক স্থানাঙ্কে বা xy-সমতলে উপস্থাপন করতে পারি। যদি কোনো একটি ত্রিকোণমিতিক কোণ θ কে xy-সমতলে এমন ভাবে স্থাপন করা হয় যে, কোণটির শীর্ষবিন্দু O তে এবং প্রারম্ভিক রশ্মি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের উপর অবস্থান করে তবে এই অবস্থানকে কোণের আদর্শ অবস্থান (standard position) বলে।

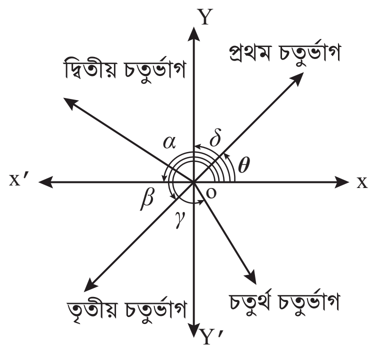


জোড়ায় কাজ:

নিচের কোন কোণগুলো আদর্শ অবস্থানে আছে? যেগুলো আদর্শ অবস্থানে নাই সেগুলোর কারণ ব্যাখ্যা করো এবং নিচের খালি ঘরে লেখো।



৪ আদর্শ অবস্থানে বিভিন্ন চতুর্ভাগে ত্রিকোণমিতিক কোণ



দ্বিমাত্রিক স্থানাঙ্ক জ্যামিতিতে x-অক্ষ এবং y-অক্ষ xy-সমতলকে চারটি অংশে ভাগ করে। এদেরকে প্রথম চতুর্ভাগ (first quadrant), দ্বিতীয় চতুর্ভাগ (second quadrant), তৃতীয় চতুর্ভাগ (third quadrant) এবং চতুর্থ চতুর্ভাগ (fourth quadrant) বলে। পাশের চিত্রে চতুর্ভাগগুলো দেখানো হয়েছে। একটি ত্রিকোণমিতিক কোণ আদর্শ অবস্থানে এই চার চতুর্ভাগের যে কোনো একটিতে অথবা অক্ষের উপরে অবস্থান করে। চতুর্ভাগের ভিতরে অবস্থান করলে তাকে কোয়াড্রেন্ট কোণ (quadrant angle) এবং অক্ষের উপর অবস্থান করলে কোয়াড্রেন্টাল কোণ (quadrantal angle) বলা হয়। পাশের চিত্রে θ একটি কোয়াড্রেন্ট কোণ যার প্রান্তিক রশ্মি প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থান করছে। একইভাবে α, β ও γ কোয়াড্রেন্ট কোণ যাদের প্রান্তিক রশ্মি যথাক্রমে দ্বিতীয়, তৃতীয় এবং চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থান করছে। অপরদিকে, δ একটি কোয়াড্রেন্টাল কোণ যার প্রান্তিক রশ্মি y-অক্ষের ধনাত্মক দিকে অবস্থান করছে।

উদাহরণ: আদর্শ অবস্থানে $\angle XOA = 210^\circ$ কোণটির প্রান্তিক বাহু OA কোন চতুর্ভাগে আছে নির্ণয় করো।

সমাধান: এখানে $210^\circ = 180^\circ + 30^\circ$.

যেহেতু 210° কোণটি একটি ধনাত্মক কোণ। সুতরাং এই কোণটি উৎপন্ন করতে প্রান্তিক রশ্মি OA আদি রশ্মি OX থেকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে 180° ঘুরে একই দিকে আরও 30° ঘুরে তৃতীয় চতুর্ভাগে এসে অবস্থান করছে। ফলে কোণটির প্রান্তিক বাহু তৃতীয় চতুর্ভাগে রয়েছে।

উদাহরণ: আদর্শ অবস্থানে $\angle XOA = -\ 210^\circ$ কোণটির প্রান্তিক বাহু OA কোন চতুর্ভাগে আছে নির্ণয় করো।

সমাধান: এখানে $-210° = -180° - 30°$.

যেহেতু $-210°$ কোণটি একটি ঋণাত্মক কোণ। সুতরাং এই কোণটি উৎপন্ন করতে প্রান্তিক রশ্মি OA আদি রশ্মি OX থেকে ঘড়ির কাঁটার দিকে $180°$ ঘুরে একই দিকে আরও $30°$ ঘুরে দ্বিতীয় চতুর্ভাগে এসে অবস্থান করছে। ফলে কোণটির প্রান্তিক বাহু দ্বিতীয় চতুর্ভাগে রয়েছে।

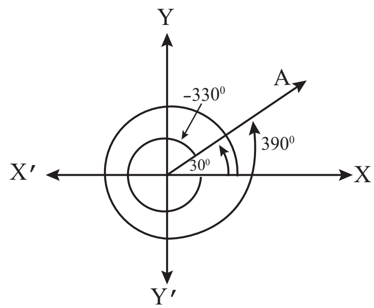
জোড়ায় কাজ

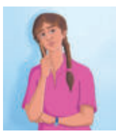
রুলার এবং চাঁদা ব্যবহার করে $130°$, $400°$, $-200°$ এবং $-750°$ কোণগুলো আদর্শ অবস্থানে আঁকো। এগুলো কোয়াড্রেন্ট নাকি কোয়াড্রেন্টাল কোণ তা নির্ণয় করো। কোণগুলো কোন চতুর্ভাগে আছে তা উল্লেখ করো। তোমাদের কাজ শিক্ষককে দেখাও।

৪.১ কোটার্মিনাল কোণ

আদর্শ অবস্থানে দুইটি ত্রিকোণমিতিক কোণের প্রান্তিক রশ্মি একই হলে কোণ দুইটিকে **কোটার্মিনাল কোণ** (coterminal angles) বলে।

উদাহরণ: $30°$ এবং $-330°$ কোণ দুইটি কোটার্মিনাল। কারণ, আদর্শ অবস্থানে এই দুইটি ত্রিকোণমিতিক কোণের প্রান্তিক রশ্মি একই। আবার $390°$ কোণটিও $30°$ কোণের সাথে কোটার্মিনাল। পাশের চিত্রে $30°$, $-330°$ এবং $390°$ কোণগুলো দেখানো হয়েছে, যেখানে OA প্রান্তিক রশ্মি।



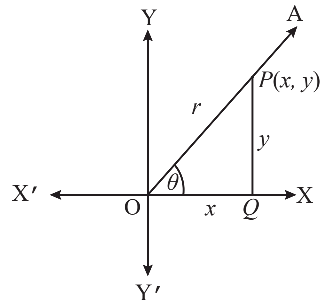


বুদ্ধি খাটাও

$40°$ এর 3 টি ধনাত্বক এবং 3 টি ঋণাত্বক কোটার্মিনাল কোণ বের করো এবং রুলার ও চাঁদার মাধ্যমে কোণগুলোকে নিচের খালি জায়গায় আদর্শ অবস্থানে উপস্থাপন করো।

৫. কোণের আদর্শ অবস্থানে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

আমরা সূক্ষ্মকোণের ক্ষেত্রে সমকোণী ত্রিভুজ এঁকে ত্রিভুজের বাহুর মাধ্যমে বিভিন্ন ত্রিকোণমিতিক অনুপাত বের করা শিখেছি এবং দেখেছি যে কোণের মান পরিবর্তনের সাথে সাথে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতও পরিবর্তিত হয়। চলো এবার কার্তেসীয় তলে বিভিন্ন কোণের আদর্শ অবস্থানে ত্রিভুজ এঁকে স্থানাঙ্ক ব্যবহার করে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত বের করার চেষ্টা করি। তোমরা আগের অভিজ্ঞতায় দ্বিমাত্রিক স্থানাঙ্কে বা xy-সমতলে বিন্দু উপস্থাপন করতে শিখেছ। এখানে আমরা আদর্শ কোণের প্রান্তিক রশ্মির উপর বিন্দুর অবস্থান থেকে বিভিন্ন ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান বের করব।



ধরি, আদর্শ অবস্থানে $\theta = \angle XOA$ একটি ত্রিকোণমিতিক কোণ যার প্রান্তিক রশ্মি OA (পাশের চিত্র অনুযায়ী)। ধরি, OA এর উপরে যে কোনো একটি বিন্দু (মূলবিন্দু ব্যতিত) $P(x, y)$. তাহলে, $OP = r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

সুতরাং, θ এর সাপেক্ষে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলো নিম্নরূপ :

$$\sin\theta = \frac{y}{r},\ \cos\theta = \frac{x}{r},\ \tan\theta = \frac{y}{x},\ \cot\theta = \frac{x}{y},\ \sec\theta = \frac{r}{x},\ \csc\theta = \frac{r}{y}.$$

উদাহরণ: আদর্শ অবস্থানে কোণ $\theta = \angle XOA$ এর প্রান্তিক বাহুর উপর $P(-3, 2)$ বিন্দুর সাপেক্ষে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলো নির্ণয় করো।

সমাধান: এখানে $x = -3$, $y = 2$ এবং $OP = r = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ সুতরাং ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলো:

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{2}{\sqrt{13}} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-3}{\sqrt{13}} = -\frac{3}{\sqrt{13}} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3},$$

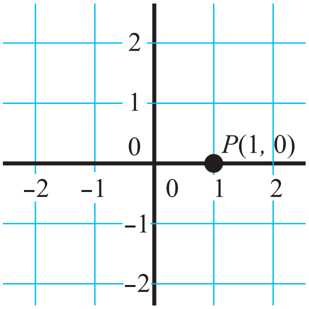
$$\csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{13}}{2} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{13}}{-3} = -\frac{\sqrt{13}}{3} \qquad \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}$$

একক কাজ

আদর্শ অবস্থানে কোণ $\theta = \angle XOA$ এর প্রান্তিক বাহুর উপর $P(1, -2)$ বিন্দুর সাপেক্ষে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলো নির্ণয় করো।

৬. কোয়াড্রেন্টাল কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

আদর্শ অবস্থানে কোয়াড্রেন্টাল কোণের প্রান্তিক রশ্মি যে কোনো অক্ষের উপর অবস্থান করে। সুতরাং আমরা বিভিন্ন অক্ষের উপর বিন্দুর সাপেক্ষে কোয়াড্রেন্টাল কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত বের করতে পারি।



উদাহরণ: x-অক্ষের ধনাত্বক দিকের উপর P(1, 0) বিন্দুর সাপেক্ষে আদর্শ অবস্থানে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত বের করো।

সমাধান: এখানে $x = 1, y = 0$ এবং $OP = r = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$.

সুতরাং ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলো:

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0$ $\quad\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{1} = 1$ $\quad\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0,$

$\csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{1}{0} =$ অসংজ্ঞায়িত $\quad\sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{1}{1} = 1$ $\quad\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{1}{0} =$ অসংজ্ঞায়িত

দলগত কাজ/প্রজেক্ট

শিক্ষকের নির্দেশমতো কয়েকটি (কমপক্ষে চারটি বা চারের গুণিতক সংখ্যক) দলে বিভক্ত হবে। প্রত্যেক দল একটি করে গ্রাফপেপার নিবে। গ্রাফপেপারে x-অক্ষ এবং y-অক্ষ আঁকবে এবং মূলবিন্দু O নির্ধারণ করবে। প্রত্যেক দল প্রতিটি অক্ষের ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক দিকের উপর একটি করে বিন্দু নিবে এবং বিন্দুগুলোকে A, B, C, D দ্বারা নির্দেশ করবে। শিক্ষক খেয়াল রাখবেন যেন প্রত্যেক দলের নেওয়া বিন্দগুলো ভিন্ন ভিন্ন হয়। প্রত্যেক দল একটি করে পোস্টারপেপার নিয়ে তার উপরের দিকে একপাশে গ্রাফপেপারটি গাম দিয়ে লাগিয়ে দিবে। এবার পোস্টারপেপারে নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর লিখবে।

- x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের উপর বিন্দু A এর স্থানাঙ্ক :
- y-অক্ষের ধনাত্মক দিকের উপর বিন্দু B এর স্থানাঙ্ক :
- x-অক্ষের ঋণাত্মক দিকের উপর বিন্দু C এর স্থানাঙ্ক :
- y-অক্ষের ঋণাত্মক দিকের উপর বিন্দু D এর স্থানাঙ্ক :
- আদর্শ অবস্থানে প্রান্তিক রশ্মি OA এর ধনাত্মক কোণ:
- আদর্শ অবস্থানে প্রান্তিক রশ্মি OB এর ধনাত্মক কোণ:
- আদর্শ অবস্থানে প্রান্তিক রশ্মি OC এর ধনাত্মক কোণ:
- আদর্শ অবস্থানে প্রান্তিক রশ্মি OD এর ধনাত্মক কোণ:
- এখন প্রত্যেক দল তাদের নেওয়া বিন্দগুলোর সাপেক্ষে প্রত্যেক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত বের করে নিচের ছকটি পূরণ করবে।

$\theta°$ / অনুপাত	0°	90°	180°	270°
sin				
cos				
tan				
sec				
csc				
cot				

ভিন্ন ভিন্ন দলের ভিন্ন ভিন্ন বিন্দু হওয়ার পরেও উপরের ছকের প্রত্যেক ঘরের মান একই হয়েছে!

- উপরের ছকের প্রত্যেক ঘরের মানগুলো একই হওয়ার কারণ কী? প্রত্যেকে যুক্তি দিয়ে চিন্তা করো এবং তোমার দলের সকল সদস্যের সাথে আলোচনা করে একটি সিদ্ধান্তে পৌঁছাও। তোমাদের সিদ্ধান্তটি পোস্টার পেপারে লিখে উপস্থাপন করো।

এবার শিক্ষকের নির্দেশনা মোতাবেক কোনো একদিনে তোমাদের প্রজেক্টটি সকলের সামনে উপস্থাপন করো।

৭. কোয়াড্রেন্ট কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

আদর্শ অবস্থানে কোয়াড্রেন্ট কোণের প্রান্তিক রশ্মি যে কোনো চতুর্ভাগে অবস্থান করে। সুতরাং আমরা বিভিন্ন চতুর্থাংশের বিন্দুর সাপেক্ষে কোয়াড্রেন্ট কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত বের করতে পারি।

উদাহরণ: x-অক্ষের ধনাত্বক দিকের সাথে $P(1, 1)$ বিন্দুর সাপেক্ষে আদর্শ অবস্থানে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত বের করো।

সমাধান: এখানে $x = 1, y = 1$ এবং $OP = r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. সুতরাং ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলো:

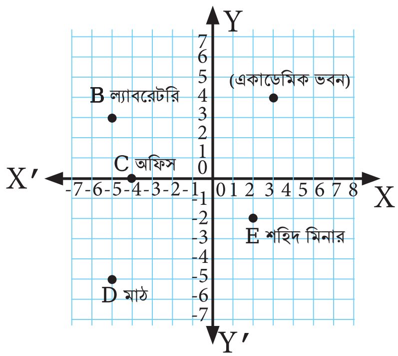
$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} \qquad \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{1}{1} = 1$$

লক্ষ করে দেখো, উপরের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলো 45° ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সাথে মিলে গেছে। এর কারণ কী? চিন্তা করে তোমার যুক্তি নিচের খালি জায়গায় লেখো।

জোড়ায় কাজ

পাশের গ্রাফপেপারে একটি শিক্ষা প্রতিষ্ঠানের কয়েকটি অংশের অবস্থান চিহ্নিত করা আছে। এখানে A, B, C, D ও E বিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক বের করো। মূলবিন্দু $(0, 0)$ থেকে উক্ত বিন্দুগুলোর প্রত্যেকটি দিয়ে গমনকারী রেখাকে প্রান্তিক রশ্মি ধরে ত্রিকোণমিতিক কোণ θ এর আদর্শ অবস্থানে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত বের করে নিচের ছকটি পূরণ করো।



	(x, y)	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\csc\theta$	$\sec\theta$	$\cot\theta$
A							
B							
C							
D							
E							

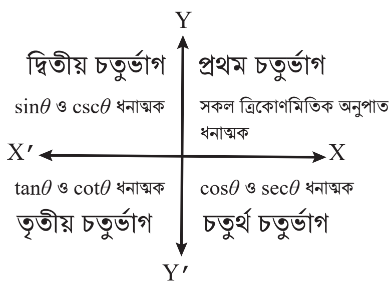
৮. বিভিন্ন চতুর্ভাগে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহের চিহ্ন

xy-সমতলে আদর্শ অবস্থানে কোণ $\theta = \angle XOA$ এর ঘূর্ণায়মান রশ্মি OA ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘূর্ণনের ফলে প্রান্তিক অবস্থানের উপর নির্ভর করে আদি রশ্মি OX এর সাথে বিভিন্ন পরিমাপের কোণ উৎপন্ন করে। OA এর উপর যে কোনো বিন্দু $P(x, y)$ নিলে বিভিন্ন চতুর্ভাগে অবস্থানের কারণে P বিন্দুর স্থানাঙ্কের অর্থাৎ x ও y এর চিহ্নের পরিবর্তন হবে। তবে দূরত্ব বিবেচনায় $OP = r$ সবসময় ধনাত্মক হবে। এই ধারণা ব্যবহার করে আমরা বিভিন্ন চতুর্ভাগে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর মান বের করতে পারবো।

চলো এবার নিচের ছকের ফাঁকা স্থান পূরণ করি। কয়েকটি করে দেয়া আছে। বাকিগুলো তোমরা লেখো।

চতুর্ভাগ	ভুজ	কোটি	অনুপাতসমূহের চিহ্ন
প্রথম	$x > 0$	$y > 0$	$\sin\theta = \frac{y}{r} > 0$, $\cos\theta = \frac{x}{r} > 0$, $\tan\theta = \frac{y}{x} > 0$ $\csc\theta = \frac{r}{y} > 0$, $\sec\theta =$ $\cot\theta =$
দ্বিতীয়	$x < 0$		$\sin\theta =$ $\cos\theta = \frac{x}{r} < 0$, $\tan\theta =$ $\csc\theta =$ $\sec\theta =$ $\cot\theta = \frac{x}{y} < 0$
তৃতীয়		$y < 0$	$\sin\theta = \frac{y}{r} < 0$, $\cos\theta =$ $\tan\theta =$ $\csc\theta =$ $\sec\theta =$ $\cot\theta =$
চতুর্থ	$x > 0$		$\sin\theta = \frac{y}{r} < 0$, $\cos\theta =$ $\tan\theta =$ $\csc\theta =$ $\sec\theta = \frac{r}{x} > 0$ $\cot\theta =$

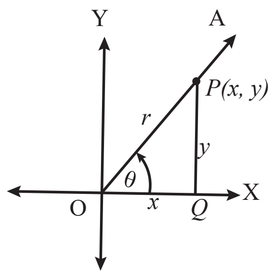
আমরা দেখলাম চতুর্ভাগ বিবেচনায় অনুপাতগুলো ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হতে পারে। সহজে মনে রাখার জন্য আমরা পাশের চিত্রটি ব্যবহার করতে পারি। এই চিত্রে কোন চতুর্ভাগে কোন কোন অনুপাতগুলো ধনাত্মক তা নির্দেশ করা হয়েছে।



৯. কোণের পার্থক্য অনুসারে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের আন্তঃসম্পর্ক

স্থানাঙ্ক জ্যামিতির বিভিন্ন চতুর্ভাগে অবস্থান থেকে আমরা ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের আন্তঃসম্পর্ক নির্ণয় করতে পারি।

পাশের চিত্র অনুযায়ী সমকোণী ত্রিভুজ ΔOPQ এর ক্ষেত্রে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত,



$\sin\theta = \frac{y}{r}$, $\cos\theta = \frac{x}{r}$, $\tan\theta = \frac{y}{x}$,

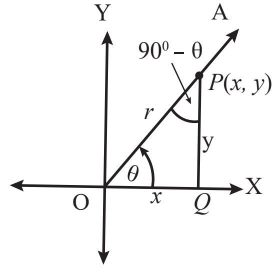
$\csc\theta = \frac{r}{y}$, $\sec\theta = \frac{r}{x}$, $\cot\theta = \frac{x}{y}$

এই সকল ত্রিকোণমিতিক অনুপাত ব্যবহার করে আমরা বিভিন্ন কোণের আন্তঃসম্পর্ক নির্ণয় করতে পারি।

৯.১ পূরক কোণের মাধ্যমে

তোমরা জানো, ত্রিভুজের দুটি কোণের সমষ্টি এক সমকোণ হলে কোণ দুটির একটিকে অপরটির পূরক কোণ (complementary angle) বলে। এখানে $\angle OPQ$ হলো θ এর পূরক কোণ। অর্থাৎ $\angle OPQ = 90° - \theta$.

$P(x, y)$ বিন্দুর সাপেক্ষে আদর্শ কোণ θ থেকে পাই,



$$\sin\theta = \frac{y}{r}, \quad \cos\theta = \frac{x}{r}, \quad \tan\theta = \frac{y}{x},$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y}, \quad \sec\theta = \frac{r}{x}, \quad \cot\theta = \frac{x}{y}$$

আবার, পাশের চিত্র অনুযায়ী সমকোণী ত্রিভুজ ΔOPQ এর ক্ষেত্রে $\angle OPQ = 90° - \theta$ অনুযায়ী সন্নিহিত বাহু y এবং বিপরীত বাহু x. সুতরাং ত্রিকোণমিতিক অনুপাত,

$$\sin(90°-\theta) = \frac{x}{r}, \quad \cos(90°-\theta) = \frac{y}{r}, \quad \tan(90°-\theta) = \frac{x}{y}$$

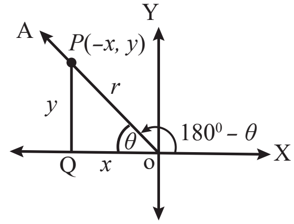
$$\csc(90°-\theta) = \frac{r}{x}, \quad \sec(90°-\theta) = \frac{r}{y}, \quad \cot(90°-\theta) = \frac{y}{x}$$

এখন উপরের সম্পর্কগুলো পর্যবেক্ষণ করে তোমরা নিচের সারণিটি পূরণ করো। এখানে দুইটি করে দেওয়া আছে।

$\sin(90° - \theta) = \frac{x}{r} = \cos\theta$	$\csc(90° - \theta) =$
$\cos(90° - \theta) =$	$\sec(90° - \theta) = \frac{r}{y} = \csc\theta$
$\tan(90° - \theta) =$	$\cot(90° - \theta) =$

৯.২ আদর্শ কোণের প্রান্তিক রশ্মির অবস্থান দ্বিতীয় চতুর্ভাগে

এবার পাশের চিত্রটির দিকে লক্ষ করো। OA রশ্মিটি ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরে দ্বিতীয় চতুর্ভাগে অবস্থান করে x-অক্ষের ঋণাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। সুতরাং আদর্শ অবস্থানে প্রান্তিক রশ্মি OA এর ত্রিকোণমিতিক কোণ হলো $(180° - \theta)$. OA রশ্মির উপর একটি বিন্দু P নিই। P থেকে x-অক্ষের উপর PQ লম্ব আঁকি। ধরি $OQ = x$, $PQ = y$ এবং $OP = r$. তাহলে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-x, y)$.



সমকোণী ত্রিভুজ ΔOPQ এর ক্ষেত্রে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ:

1) $\begin{cases} \sin\theta = \dfrac{y}{r}, & \cos\theta = \dfrac{x}{r}, & \tan\theta = \dfrac{y}{x} \\ \csc\theta = \dfrac{r}{y}, & \sec\theta = \dfrac{r}{x}, & \cot\theta = \dfrac{x}{y} \end{cases}$

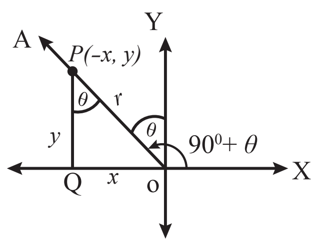
$P(-x, y)$ বিন্দুর সাপেক্ষে $(180° - \theta)$ কোণের আদর্শ অবস্থানে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ:

2) $\begin{cases} \sin(180° - \theta) = \dfrac{y}{r}, & \cos(180° - \theta) = \dfrac{-x}{r}, & \tan(180° - \theta) = \dfrac{y}{-x} \\ \csc(180° - \theta) = \dfrac{r}{y}, & \sec(180° - \theta) = \dfrac{r}{-x}, & \cot(180° - \theta) = \dfrac{-x}{y} \end{cases}$

(1) এবং (2) ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ থেকে ত্রিকোণমিতিক কোণের সম্পর্ক নিচের সারনিতে লেখো।

$\sin(180° - \theta) =$	$\csc(180° - \theta) =$
$\cos(180° - \theta) =$	$\sec(180° - \theta) =$
$\tan(180° - \theta) =$	$\cot(180° - \theta) =$

এবার পাশের চিত্র ব্যবহার করে ত্রিকোণমিতিক কোণ $90° + \theta$ এবং θ এর মধ্যে সম্পর্কসমূহ নিচে লেখো।



$\sin(90° + \theta) =$	$\csc(90° + \theta) =$
$\cos(90° + \theta) =$	$\sec(90° + \theta) =$
$\tan(90° + \theta) =$	$\cot(90° + \theta) =$

উপরের সম্পর্কগুলো ব্যবহার করে আমরা দ্বিতীয় চতুর্ভাগের কিছু কোণের মান খুব সহজেই বের করতে পারব।

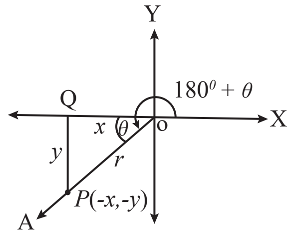
উদাহারণ: $\cos 150° = \cos(180° - 30°) = -\cos 30° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

একক কাজ:

$\sin 120^\circ$ ও $\tan 135^\circ$ এর মান নির্ণয় করো।

৯.৩ আদর্শ কোণের প্রন্তিক রশ্মির অবস্থান তৃতীয় চতুর্ভাগে

উপরের পদ্ধতি অনুযায়ী পাশের চিত্রটি পর্যবেক্ষণ করে তোমরা নিচের সম্পর্কগুলো প্রমাণ করো।



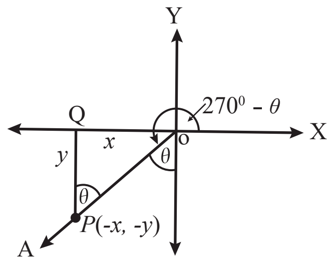
জোড়ায় কাজ

১. পাশের চিত্রকে পর্যবেক্ষণ করে নিচের সম্পর্কগুলো প্রমাণ করো।

$\sin(180^\circ + \theta) = -\sin\theta$	$\csc(180^\circ + \theta) = -\csc\theta$
$\cos(180^\circ + \theta) = -\cos\theta$	$\sec(180^\circ + \theta) = -\sec\theta$
$\tan(180^\circ + \theta) = \tan\theta$	$\cot(180^\circ + \theta) = \cot\theta$

২. পাশের চিত্রকে পর্যবেক্ষণ করে নিচের সম্পর্কগুলো প্রমাণ করো।

$\sin(270^\circ - \theta) = -\cos\theta$	$\csc(270^\circ - \theta) = -\sec\theta$
$\cos(270^\circ - \theta) = -\sin\theta$	$\sec(270^\circ - \theta) = -\csc\theta$
$\tan(270^\circ - \theta) = \cot\theta$	$\cot(270^\circ - \theta) = \tan\theta$

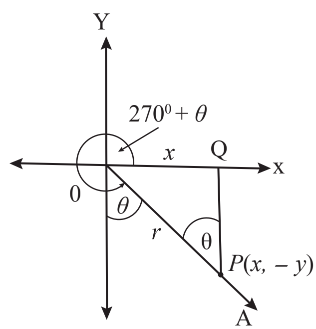


সূত্রগুলো ব্যবহার করে আমরা তৃতীয় চতুর্ভাগের কয়েকটি কোণের মান খুব সহজেই বের করতে পারব।

উদাহরণ: $\cos 225^\circ = \cos(180^\circ + 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

একক কাজ: মান নির্ণয় করো : $\sin 210^\circ$, $\tan 240^\circ$

৯.৪ আদর্শ কোণের প্রান্তিক রশ্মির অবস্থান চতুর্থ চতুর্ভাগে



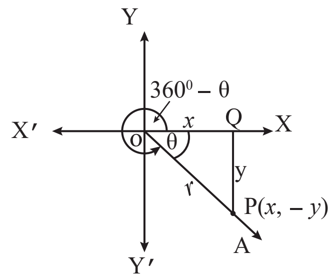
জোড়ায় কাজ

১. প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় চতুর্ভাগের ত্রিকোণমিতিক কোণের সম্পর্কগুলো নির্ণয়ের অভিজ্ঞতা থেকে পাশের চিত্র পর্যবেক্ষণ করে নিচের সম্পর্কগুলো প্রমাণ করো।

$\sin(270° + \theta) = -\cos\theta$	$\csc(270° + \theta) = -\sec\theta$
$\cos(270° + \theta) = \sin\theta$	$\sec(270° + \theta) = \csc\theta$
$\tan(270° + \theta) = -\cot\theta$	$\cot(270° + \theta) = -\tan\theta$

২. পাশের চিত্র ব্যবহার করে ত্রিকোণমিতিক কোণ $(360° - \theta)$ এবং θ এর মধ্যে সম্পর্কসমূহ নিচে লেখো।

$\sin(360° - \theta) =$	$\csc(360° - \theta) =$
$\cos(360° - \theta) =$	$\sec(360° - \theta) =$
$\tan(360° - \theta) =$	$\cot(360° - \theta) =$

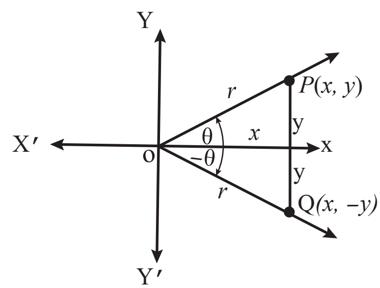


একক কাজ:

মান নির্ণয় করো : $\sin 330°$, $\cos 300°$, $\tan 315°$

৩. পাশের চিত্র ব্যবহার করে ত্রিকোণমিতিক কোণ $-\theta$ এবং θ এর মধ্যে সম্পর্কসমূহ নিচে লেখো।

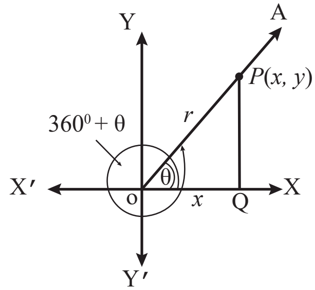
$\sin(-\theta) = \frac{-y}{r} = -\sin\theta$	$\csc(-\theta) =$
$\cos(-\theta) =$	$\sec(-\theta) =$
$\tan(-\theta) =$	$\cot(-\theta) =$



সুতরাং ত্রিকোণমিতিক কোণের মধ্যে সম্পর্কসমূহ আমরা নিচের সারণী থেকে মনে রাখতে পারি।

অনুপাত / কোণ	sin	cos	tan	csc	sec	cot
$-\theta$	$-\sin\theta$	$\cos\theta$	$-\tan\theta$	$-\csc\theta$	$\sec\theta$	$-\cot\theta$
$90° - \theta$	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\csc\theta$	$\tan\theta$
$90° + \theta$	$\cos\theta$	$-\sin\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$-\csc\theta$	$\tan\theta$

$180° - \theta$	$\sin\theta$	$-\cos\theta$	$-\tan\theta$	$\csc\theta$	$-\sec\theta$	$-\cot\theta$
$180° + \theta$	$-\sin\theta$	$-\cos\theta$	$\tan\theta$	$-\csc\theta$	$-\sec\theta$	$\cot\theta$
$270° - \theta$	$-\cos\theta$	$-\sin\theta$	$\cot\theta$	$-\sec\theta$	$-\csc\theta$	$\tan\theta$
$270° + \theta$	$-\cos\theta$	$\sin\theta$	$-\cot\theta$	$-\sec\theta$	$\csc\theta$	$-\tan\theta$
$360° - \theta$	$-\sin\theta$	$\cos\theta$	$-\tan\theta$	$-\csc\theta$	$\sec\theta$	$-\cot\theta$



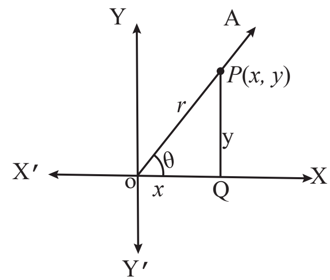
আবার কোণের মান 360°-এর বেশি হলে ধরি, কোণের মান $(360° + \theta)$। θ কোণের জন্য এবং $360°+\theta$ কোণের জন্য রশ্মিটির অবস্থান একই হবে। ফলে উভয় কোণের জন্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান একই হবে। অর্থাৎ

$\sin(360° + \theta) = \sin\theta$, $\cos(360° + \theta) = \cos\theta$ ইত্যাদি।

উদাহারণ: $\sin420° = \sin(360°+60°) = \sin60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

একক কাজ: মান নির্ণয় করো: $\cos 405°$, $\sin570°$

১০. ত্রিকোণমিতি ও স্থানাঙ্ক জ্যামিতির আন্তঃসম্পর্ক

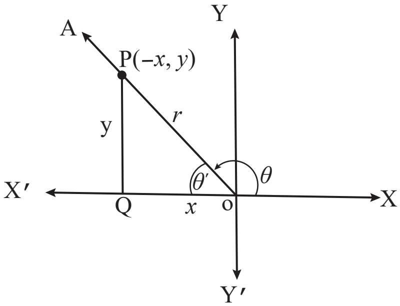


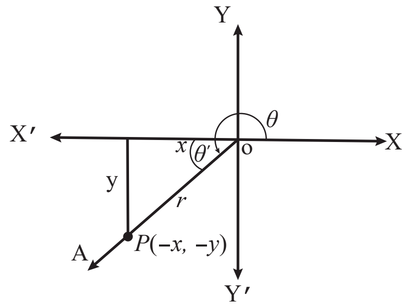
ধরি xy-সমতলে ধনাত্মক ত্রিকোণমিতিক কোণ $\theta = \angle XOA$ এর প্রান্তিক রশ্মি OA এর উপর P (মূল বিন্দু ব্যাতিত) একটি বিন্দু। তাহলে P বিন্দুকে আমরা দুইভাবে নির্দিষ্ট করতে পারি। একটি হলো স্থানাঙ্ক জ্যামিতির মাধ্যমে এবং অন্যটি হলো ত্রিকোণমিতিক কোণের মাধ্যমে। ধরি P বিন্দু হতে OX এর উপর PQ লম্ব। ধরি $OQ = x$ এবং $PQ = y$ তাহলে স্থানাঙ্ক জ্যামিতিতে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y). আবার $OP = r$ হলে P বিন্দুকে (r, θ) এর মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়। অর্থাৎ P বিন্দুর দুটি রূপ আছে। একটি হলো x-অক্ষ এবং y-অক্ষের মাধ্যমে এবং অন্যটি হলো কৌণিক দূরত্ব θ এবং OP এর দূরত্বের মাধ্যমে। এখানে আমরা $P(x, y)$ এবং $P(r, \theta)$ এর মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করব। এখানে লক্ষ রাখতে হবে যে, θ আদর্শ অবস্থানে ত্রিকোণমিতিক কোণ। $P(x, y)$ বিন্দু যে চতুর্ভাগে অবস্থান করে সেই অনুযায়ী θ এর মান বের করতে হবে। θ এর মান বের করতে হলে, θ এর রেফারেন্স কোণ সম্পর্কে জানতে হবে।

১০.১ রেফারেন্স কোণ

ধরি, $\theta = \angle XOA$ আদর্শ অবস্থানে একটি ত্রিকোণমিতিক কোণ। OA রশ্মি x-অক্ষের সাথে যে সূক্ষ্মকোণ তৈরি করে তাকে θ এর রেফারেন্স কোণ (reference angle) বলে। θ এর রেফারেন্স কোণকে θ' দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

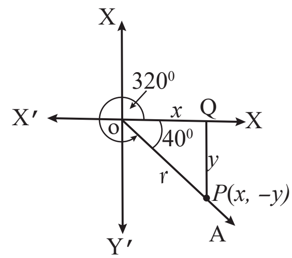
নিচে P বিন্দুর জন্য দ্বিতীয় এবং তৃতীয় চতুর্থাংশে θ কোণের রেফারেন্স কোণ θ' দেখানো হয়েছে।





উদাহরণ: $320°$ এর রেফারেন্স কোণ নির্ণয় করো।

সমাধান: $320° = 270° + 50°$. সুতরাং $320°$ কোণটি চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থান করে (পাশের চিত্র দেখো)। ইহা x-অক্ষের সাথে $360° - 320° = 40°$ সূক্ষ্মকোণ তৈরি করেছে। সুতরাং $320°$ এর রেফারেন্স কোণ $40°$.



জোড়ায় কাজ

$30°, 150°, 280°, 300°, 400°$ এবং $-240°$ এর রেফারেন্স কোণ নির্ণয় করো।

১০.২ $P(x, y)$ কে $P(r, \theta)$ এর মাধ্যমে প্রকাশ

এবার বলো তো, x ও y এর সাথে r এবং θ এর সম্পর্ক কী? মনে করে দেখো, পিথাগোরাসের সূত্র ব্যবহার করে আমরা লিখতে পারি,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

অর্থাৎ, x ও y এর সাথে r এবং θ এর সম্পর্ক নিম্নরূপ:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \tan\theta' = \frac{y}{x} \qquad \ldots (1)$$

এখানে x এবং y এর ধনাত্মক মান ধরতে হবে। এখান থেকে রেফারেন্স কোণ θ' বের করার পরে $P(x, y)$ বিন্দুর অবস্থান অনুযায়ী θ বের করতে হবে।

উদাহরণ-১

$P(-\sqrt{3}, 1)$ বিন্দুকে (r, θ) এর মাধ্যমে প্রকাশ করো।

সমাধান: এখানে $x = -\sqrt{3}$, এবং $y = 1$. সুতরাং $P(-\sqrt{3}, 1)$ বিন্দুটি দ্বিতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত।

সুতরাং $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ এবং $\tan\theta' = \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30°$.

অর্থাৎ $\theta' = 30°$. সুতরাং $\theta = 180° - 30° = 150°$.

সুতরাং (r, θ) এর মাধ্যমে $P(-\sqrt{3}, 1)$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $P(\sqrt{5}, 150°)$.

অন্যদিকে, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক r এবং θ এর মাধ্যমে দেওয়া থাকলে নিচের সম্পর্ক থেকে আমরা P বিন্দুর স্থানাঙ্ককে (x, y) এর মাধ্যমে প্রকাশ করতে পারি।

$$x = r\cos\theta \text{ এবং } y = r\sin\theta$$

উদাহরণ-২

$P(5, 240°)$ বিন্দুকে $P(x, y)$ এর মাধ্যমে প্রকাশ করো।

সমাধান: এখানে দেওয়া আছে, $r = 5$, এবং $\theta = 240°$. সুতরাং,

$$x = r\cos\theta = 5\cos 240° = 5\cos(180° + 60°) = 5(-\cos 60°) = -5\times\frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$$

এবং

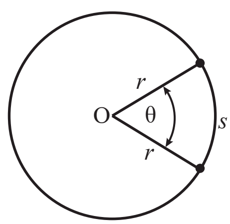
$$y = 5\sin 240° = 5\sin(180° + 60°) = 5(-\sin 60°) = -5\times\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{5\sqrt{3}}{2}$$

সুতরাং $P(x, y) = P\left(-\frac{5}{2}, -\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$

জোড়ায় কাজ

$P(\sqrt{2}, 150°)$ বিন্দুকে $P(x, y)$ এর মাধ্যমে প্রকাশ করো।

১১. ত্রিকোণমিতিক কোণ-এর রেডিয়ান পরিমাপ



এতক্ষণ আমরা ত্রিকোণমিতিক কোণ পরিমাপ করার জন্য একক হিসেবে ডিগ্রি ব্যবহার করেছি। গাণিতিক সমস্যা সমাধানের জন্য ত্রিকোণমিতিক কোণ পরিমাপের আরেকটি গুরুত্বপূর্ণ একক আছে যাকে রেডিয়ান দ্বারা নির্দেশ করা হয়। একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান চাপ বৃত্তের কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে, তাকে এক রেডিয়ান (radian) বলে।

১১.১ বৃত্তচাপের সাথে রেডিয়ান কোণের সম্পর্ক

যদি r ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তের চাপ s, বৃত্তের কেন্দ্রে θ রেডিয়ান কোণ উৎপন্ন করে, তাহলে

$$\theta = \frac{s}{r}$$

অর্থাৎ, $s = r\theta$

১১.২ ডিগ্রি এবং রেডিয়ান-এর সম্পর্ক

আমরা জানি, r ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তের পরিধির উপরের কোনো একটি বিন্দু একটি পূর্ণ ঘূর্ণন সম্পন্ন করলে কৌণিক দূরত্ব হবে $360°$ এবং ওই বিন্দুর অতিক্রান্ত দূরত্ব হবে পরিধির সমান, অর্থাৎ $2\pi r$. সুতরাং, চাপের সাথে কোণের সম্পর্ক হতে আমরা পাই,

$$360° = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ রেডিয়ান। সুতরাং,}$$

$$\boxed{1° = \frac{\pi}{180} \text{ রেডিয়ান এবং } 1 \text{ রেডিয়ান} = \frac{180°}{\pi}}$$

জোড়ায় কাজ:

1. $30°$, $45°$ এবং $60°$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ করো।
2. $\frac{5\pi}{6}$ রেডিয়ান এবং 20 রেডিয়ানকে ডিগ্রিতে প্রকাশ করো।

সমস্যা-০১: পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6440 কিলোমিটার। যদি পাবনা ও সিলেটের অবস্থান পৃথিবীর কেন্দ্রে $2.5°$ কোণ উৎপন্ন করে, তবে পাবনা থেকে সিলেটের দূরত্ব কত? $[\pi = 3.1416]$

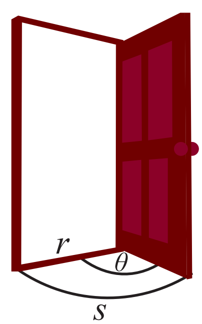
সমাধান: এখানে, পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, $r = 6440$ কি.মি.

পাবনা ও সিলেটের অবস্থান দ্বারা পৃথিবীর কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ, $\theta = 2.5° = \frac{2.5\pi}{180}$ রেডিয়ান

সুতরাং, পাবনা ও সিলেটের দূরত্ব, $s = r\theta = 6440 \times \frac{2.5\pi}{180} = 6440 \times \frac{2.5 \times 3.1416}{180}$

$= 281$ কি.মি. (প্রায়)

সমস্যা-০২: মনে করো, তোমাদের শ্রেণিকক্ষের দরজার প্রস্থ 107 সেন্টিমিটার। শ্রেণিকক্ষে একটি বেঞ্চ বেশি বসানোর জন্য দরজাটি পুরোপুরি খোলা যায় না, কিন্তু একটি টেবিল শ্রেণিকক্ষে প্রবেশ করাতে হবে। টেবিলটি শ্রেণিকক্ষে প্রবেশ করানোর জন্য কক্ষের দরজাটি পরিধি বরাবর 1.4 মিটার খুলতে হলে দরজার চৌকাঠ এবং দরজার পাল্লার মাঝে কৌণিক দূরত্ব কত হবে?



সমাধান: দরজাটি খুললে দরজার প্রান্তবিন্দু দ্বারা মেঝেতে একটি বৃত্তচাপ তৈরি হবে। ধরো, বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য s, ব্যাসার্ধ r এবং চৌকাঠ ও দরজার প্রস্থ দ্বারা মেঝেতে উৎপন্ন কোণ θ.

তাহলে ওই বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য ও ব্যাসার্ধ কত হবে তা হিসাব করে নিচের তালিকাটি পূরণ করো। s ও r এর মান মিটার এককে প্রকাশ করো।

বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য s (মিটার)	বৃত্তচাপের ব্যাসার্ধ r (মিটার)

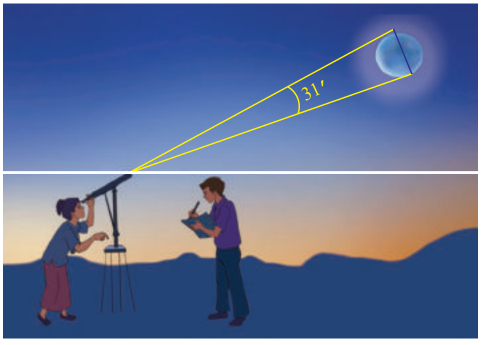
আমরা জানি, $s = r\theta$

বা, $\theta = \dfrac{s}{r} = \dfrac{1.40}{1.07} = \dfrac{1.40}{1.07} \times \dfrac{180^\circ}{\pi}$ $\quad [\because 1$ রেডিয়ান $= \dfrac{180^\circ}{\pi}]$

$\therefore\ \theta = \dfrac{252^\circ}{1.07 \times 3.1416} = \dfrac{252^\circ}{3.3615} \approx 75^\circ$

সুতরাং, কৌণিক দূরত্ব 75°

সমস্যা-০৩: পৃথিবী কোনো একটি অবস্থান থেকে চাঁদের দূরত্ব 384,400 কিলোমিটার এবং চাঁদের ব্যাস ওই বিন্দুতে $31'$ কোণ উৎপন্ন করলে, চাঁদের ব্যাস কত? [π = 3.1416]



সমাধান: এখানে, পৃথিবীর অবস্থান থেকে চাঁদের দূরত্ব, r = 384,400 কি.মি.

এবং চাঁদের ব্যাস দ্বারা পৃথিবীর ওই অবস্থানে উৎপন্ন কোণ,

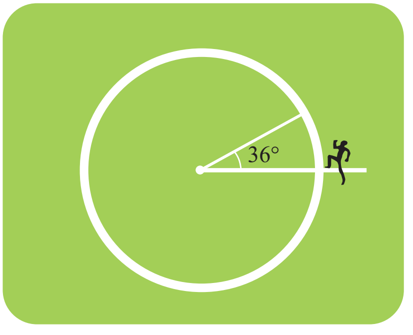
$\theta = 31' = \left(\dfrac{31}{60}\right)^\circ = (0.517)^\circ$

সুতরাং চাঁদের ব্যাস, $s = r\theta = 384400 \times \dfrac{(0.517) \times \pi}{180} = 384400 \times \dfrac{(0.517) \times 3.1416}{180}$

$= 3468.58$ কি.মি. (প্রায়)

জোড়ায় কাজ

মনে করো, তোমাদের শিক্ষাপ্রতিষ্ঠানের বার্ষিক ক্রিয়ায় 100 মিটার দৌড়ের একটি প্রতিযোগিতা রয়েছে। সেজন্য মাঠে একটি বৃত্তাকার চক্র তৈরি করলে। ওয়াসাবি ওই প্রতিযোগিতায় 9 সেকেন্ডে যে দূরত্ব অতিক্রম করে তা কেন্দ্রে 36° কোণ উৎপন্ন করে (পাশের চিত্র দেখো)।



ক) বৃত্তাকার চক্রটির ব্যাস নির্ণয় করো।

খ) ওয়াসাবি 5 সেকেন্ডে কতদুর অতিক্রম করে?

গ) সে 12 সেকেন্ডে যে দূরত্ব অতিক্রম করে ওই দূরত্ব দ্বারা কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণের পরিমাণ কত?

ঘ) ওয়াসাবির গতিবেগ নির্ণয় করো।

ঙ) একই প্রতিযোগিতায় পীরেন 13 সেকেন্ডে যে দূরত্ব অতিক্রম করে তা কেন্দ্রে 48° কোণ উৎপন্ন করে। ওয়াসাবি এবং পীরেনের মধ্যে কার দৌড়ের গতিবেগ বেশি?

অনুশীলনী

1. 5° তে কত সেকেন্ড নির্ণয় করো।

2. জ্যামিতিক রুলার এবং চাঁদা ব্যবহার করে 30°, 360°, 380°, -20° এবং -420° কোণ আঁক।

3. রুলার এবং চাঁদা ব্যবহার করে 60°, 90°, 180°, 200°, 280°, 750°, -45°, -400° কোণগুলো আদর্শ অবস্থানে আঁকো। এগুলো কোয়াড্রেন্ট নাকি কোয়াড্রেন্টাল কোণ তা নির্ণয় করো। কোণগুলো কোন চতুর্ভাগে আছে তা উল্লেখ করো।

4. মান নির্ণয় করো : $\cos 135^\circ$, $\cot 120^\circ$, $\tan 390^\circ$, $\sin(-30^\circ)$, $\sec 300^\circ$, $\csc(-570^\circ)$

5. আদর্শ অবস্থানে $A(2, 3)$, $B(-3, 1)$, $C(-4, -4)$, $D(1, -2)$, $E(-2,0)$ বিন্দুগুলো ধারা উৎপন্ন কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করো।

6. নিম্নোক্ত বিন্দুগুলোকে r এবং $\tan\theta$ এর মাধ্যমে প্রকাশ করো।

   a. $A(3, -2)$ b. $B(-2, -1)$ c. $C(-4, 0)$

7. রেডিয়ানে প্রকাশ কর:

   a. $75^\circ 30'$ b. $45^\circ 44' 43''$ c. $60^\circ 30' 15''$

8. ডিগ্রীতে প্রকাশ কর:

   a. $\frac{4\pi}{25}$ রেডিয়ান b. 1.3177 রেডিয়ান c. 0.9759 রেডিয়ান

9. পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6440 কিলোমিটার। যদি টেকনাফ ও তেঁতুলিয়ার অবস্থান পৃথিবীর কেন্দ্রে $10^\circ 6' 3''$ কোণ উৎপন্ন করে, তবে টেকনাফ থেকে তেঁতুলিয়ার দূরত্ব কত?

10. পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6440 কিলোমিটার। ধরো, পৃথিবীর উপরে দুইটি স্যাটেলাইট এমন অবস্থানে আছে যে তারা পৃথিবীর কেন্দ্রে $33''$ কোণ উৎপন্ন করে। স্যাটেলাইট দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব কত?

সুষম ও যৌগিক ঘনবস্তু পরিমাপ

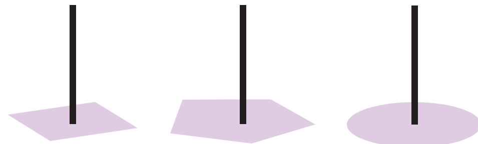
এই অভিজ্ঞতায় শিখতে পারবে-

- বৃত্তচাপ ও বৃত্তকলা পরিমাপ
- কোণকের ধারণা
- কোণকের ভূমি, বক্রতলের ক্ষেত্রফল, আয়তন পরিমাপ
- গোলকের ক্ষেত্রফল ও আয়তন পরিমাপ
- প্রিজমের ধারণা, ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয়
- পিরামিডের ক্ষেত্রফল ও আয়তন পরিমাপ
- সুষম ও যৌগিক ঘনবস্তু পরিমাপের সূত্রের ধারণা এবং সূত্র প্রতিপাদন

সুষম ও যৌগিক ঘনবস্তু পরিমাপ

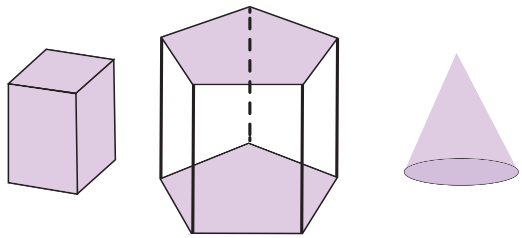
পূর্বের শ্রেণিতে তোমরা দ্বিমাত্রিক ও ত্রিমাত্রিক বস্তুর ধারণা পেয়েছ। দ্বিমাত্রিক বস্তু দুইটি মাত্রায় অবস্থান করে, মাত্রা দুটি হলো দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ। একটি সমতলে ত্রিভুজ, চতুর্ভুজ, পঞ্চভুজ বা যে কোনো বহুভুজ আঁকলে তারা দ্বিমাত্রিক তলে অবস্থান করে। আমরা শুধু তাদের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ পরিমাপ করতে পারি। কিন্তু এই আকৃতিগুলোর সাথে আরেকটি মাত্রা 'উচ্চতা' যুক্ত হলে ত্রিমাত্রিক বস্তু গঠিত হয়। যেমন–

চিত্র ১: দ্বিমাত্রিক বস্তু



চিত্র ২: দ্বিমাত্রিক বস্তুর সাথে উচ্চতা যুক্ত

আমরা প্রকৃতিতে যেসকল বস্তু দেখি তার প্রায় সবই ত্রিমাত্রিক বস্তু, অর্থাৎ এরা তিনটি মাত্রায় অর্থাৎ, দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতায় অবস্থান করে। মানুষ, অন্যান্য প্রাণি, গাছপালা, ঘরবাড়ি, সু-উচ্চ ভবন, পাহাড়-পর্বত ইত্যাদি ত্রিমাত্রিক বস্তুর উদাহরণ। ত্রিমাত্রিক বস্তুগুলোকে ঘনবস্তু (Solid) বলা হয়। প্রতিদিন বিভিন্ন ঘনবস্তু নিয়ে আমাদের কাজ করতে হয়, যেমন, তোমরা যে শিক্ষা প্রতিষ্ঠানে পড়াশুনা করো তা একটা ঘনবস্তু, তুমি যে চেয়ার বা বেঞ্চে বসে ক্লাস করো তা ঘনবস্তু, এমনকি তুমি যে বই, খাতা ও কলম ব্যবহার করো সেগুলোও ঘনবস্তু। এরকম দৈনন্দিন জীবনের বিভিন্ন প্রয়োজনীয় ঘনবস্তু সঠিক আকৃতিতে তৈরি করার জন্য এগুলোর সঠিক পরিমাপ নির্ণয় করার প্রয়োজন হয়। এই অভিজ্ঞতায় আমরা সুষম ঘনবস্তুর বিভিন্ন পরিমাপ কৌশল সম্পর্কে শিখবো।



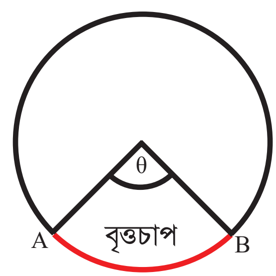
চিত্র ৩: ত্রিমাত্রিক বস্তু

উপরের চিত্রগুলো পর্যবেক্ষণ করলে দেখা যায় যে, ত্রিমাত্রিক বস্তুগুলো দ্বিমাত্রিক বস্তু দ্বারাই গঠিত হয়েছে। কিছু ঘনবস্তু, যেমন, কোণক বৃত্তকলা দ্বারা গঠিত হয়। একারণে চলো আমরা প্রথমেই বৃত্তচাপ ও বৃত্তকলা সম্পর্কে জেনে নেই।

বৃত্তচাপ ও বৃত্তকলার পরিমাপ (Measurement of Arc and Sector)

তোমরা পূর্বের শ্রেণিগুলোতে বৃত্ত সংক্রান্ত বিস্তারিত জেনেছ। আবার, কাগজ কেটে বৃত্ত তৈরি করাও শিখেছ। বৃত্তের পরিধি ও বৃত্তের ক্ষেত্রফল পরিমাপের পদ্ধতি শিখেছ। চলো বৃত্ত সম্পর্কে আরেকটু জেনে নিই।

বৃত্তের পরিধির উপর যে কোনো দুইটি বিন্দু A ও B নাও। এই AB অংশই একটি বৃত্তচাপ (arc)। সুতরাং, বৃত্তের পরিধির যে কোনো অংশই বৃত্তচাপ। মনে করি, বৃত্তটির ব্যাসার্ধ r একক এবং AB বৃত্তচাপ কেন্দ্রে $\theta°$ কোণ উৎপন্ন করে।



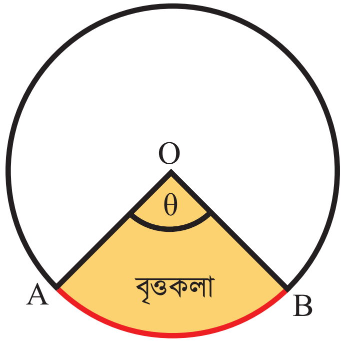
আবার, বৃত্তের কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণের পরিমাপ 360°.

বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি করলে কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণের পরিমাপ বৃদ্ধি পায়, আর দৈর্ঘ্য কমালে কোণের পরিমাপও কমে যায়। এই হ্রাস-বৃদ্ধির অনুপাত সমান। সুতরাং, বৃত্তচাপ ও কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ পরস্পর সমানুপাতী। অর্থাৎ,

$$\frac{\text{বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য}}{\text{বৃত্তের পরিধি}} = \frac{\theta^\circ}{360^\circ}$$

$$\frac{\text{বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য}}{2\pi r} = \frac{\theta}{360}$$

$$\therefore \text{ বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য} = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r \text{ একক}$$



বৃত্তকলা (Sector): বৃত্তের দুইটি ব্যাসার্ধ ও একটি চাপ দ্বারা গঠিত অঞ্চলকে **বৃত্তকলা** বলে। মনে করি, বৃত্তটির ব্যাসার্ধ r একক এবং AOB বৃত্তকলাটি কেন্দ্রে θ° কোণ উৎপন্ন করেছে।

আবার, বৃত্তের কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণের পরিমাপ 360°.

বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল ও কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ পরস্পর সমানুপাতী।

$$\frac{\text{বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল}}{\text{বৃত্তের ক্ষেত্রফল}} = \frac{\theta^\circ}{360^\circ}$$

$$\frac{\text{বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল}}{\pi r^2} = \frac{\theta}{360}$$

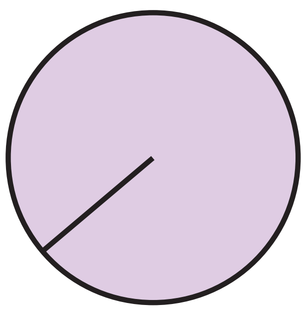
$$\therefore \text{ বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল} = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 \text{ বর্গ একক}$$

কোণক (Cone)

চল আজ আমরা বৃত্ত নিয়ে আরেকটি মজার কাজ করি।

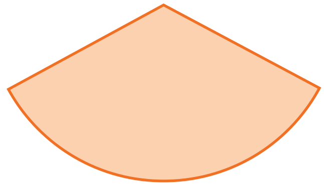
একক কাজ

প্রত্যেকেই কাগজ কেটে একটি করে বৃত্ত তৈরি করো। অতঃপর; নিজ নিজ বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্দেশ করো এবং সুতা বা স্কেল ব্যবহার করে ব্যাসার্ধ পরিমাপ করো। তোমরা ইতোমধ্যে বৃত্তের ব্যাসার্ধ ব্যবহার করে পরিধি ও ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা শিখেছ। সুতরাং, তোমার বৃত্তটির পরিধি ও ক্ষেত্রফল পরিমাপ করো। তোমার পরিমাপের তথ্যগুলো পাশের ছকে লিখে রাখো।



ব্যাসার্ধ	পরিধি	ক্ষেত্রফল

এবার তোমার বৃত্ত থেকে চিত্রের ন্যায় তোমার ইচ্ছামতো একটি বৃত্তকলা কেটে নাও। তোমার বৃত্তকলাটির চাপের দৈর্ঘ্য ও বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল পরিমাপ করো। তোমার পরিমাপের তথ্যগুলো দিয়ে নিচের ছকটি পূরণ করো।



বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য	বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল

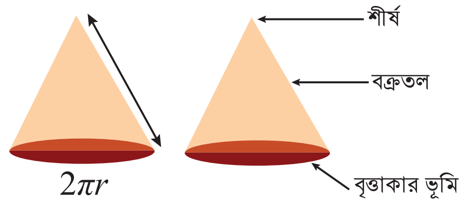
এবার বৃত্তকলার কেন্দ্রকে ঠিক রেখে নিচের চিত্রের ন্যায় গোলাকার করে মুড়িয়ে একটি ঝালমুড়ি খাওয়ার ঠোঙা বা চোঙাকৃতি বস্তু বানিয়ে ফেলো। বাহ! কি চমৎকার কৌশল অবলম্বন করে তুমি নিত্য ব্যবহার্য একটি জিনিস তৈরি করে ফেললে। এটি কোন ধরনের বস্তু তুমি কি বলতে পার? এটি একটি ত্রিমাত্রিক বস্তু। তার মানে একটি দ্বিমাত্রিক বৃত্তের কাগজ কেটে তুমি ত্রিমাত্রিক একটি বস্তু বানিয়ে ফেললে।

তুমি কি এই ত্রিমাত্রিক বস্তুটির নাম বলতে পার? দেখো তো এ ধরনের বস্তুর মতো আইসক্রিমের কথা তোমার মনে পড়ে কিনা। তোমাদের মধ্যে কেউ কেউ হয়তো এই আইসক্রিম খেয়ে থাকবে। তুমি কি বলতে পার ওই আইসক্রিমের নাম কি? তোমরা ওই আইসক্রিমকে কোণ আইসক্রিম বলে থাকো।

তুমি কাগজ কেটে যে ত্রিমাত্রিক বস্তুটি বানিয়েছো তার নাম **কোণক**।

কোণক (Cone): কোণক হলো একটি শীর্ষ থেকে বক্রাকার তল নিয়ে বৃত্তাকার ভূমির উপর গঠিত একটি ঘনবস্তু।

বৃত্তকলাটি কোণক আকৃতি ধারণ করার ফলে বৃত্তকলার কেন্দ্র বিন্দুটি কোণকের শীর্ষবিন্দুতে (apex of cone) পরিণত হয়েছে। এবার শীর্ষবিন্দু থেকে কোণকের নিচ পর্যন্ত অর্থাৎ, তীর চিহ্নিত দূরত্ব পরিমাপ করো। কোণকের এই দূরত্বকে হেলানো উচ্চতা বা **হেলানো তলের দৈর্ঘ্য** (lateral height) বলে। বৃত্তকলার ব্যাসার্ধ ও কোণকের হেলানো উচ্চতা নিচের ছকে লিখে রাখো।



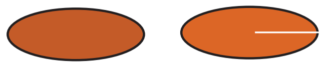
উপাদানের নাম	বৃত্তকলার ব্যাসার্ধ	কোণকের হেলানো তলের দৈর্ঘ্য
পরিমাপ		

কোণকের হেলানো উচ্চতা কি বৃত্তকলার ব্যাসার্ধের সমান, নাকি কাছাকাছি হয়েছে? আসলে এই দূরত্ব দুইটি

পরস্পর সমান।

লক্ষ করো, বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল দ্বারা কোণকের বাঁকা তল বা ঢালু তল উৎপন্ন হয়েছে। এটি **কোণকের বক্রতল** (curved surface)। তাহলে দেখা যাচ্ছে, **বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল ও কোণকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান।**

তোমার তৈরিকৃত কোণকটি উপরের চিত্রের ন্যায় একটি কাগজের উপর রাখো এবং এর চতুর্দিকে পেন্সিল বা কলম দ্বারা দাগ দাও। এবার কোণকটিকে সরালে কী চিত্র দেখতে পাচ্ছ? নিশ্চয় একটি বৃত্ত দেখতে পাচ্ছ। বৃত্তটিকে সুন্দর করে কেটে নাও। এই বৃত্তকে **কোণকের ভূমি** (base of cone) বলে।



এবার সুতা বা স্কেল ব্যবহার করে এই বৃত্তের ব্যাসার্ধ, পরিধি ও ক্ষেত্রফল পরিমাপ করো; অতপর নিচের ছকটি পূরণ করো।

উপাদানের নাম	ব্যাসার্ধ	পরিধি	ক্ষেত্রফল
পরিমাপ			

তুমি পরিধির যে পরিমাপ পেলে, তা বৃত্তকলার চাপের দৈর্ঘ্যের সাথে তুলনা করো। লক্ষ করো, দৈর্ঘ্য দুইটির পরিমাপ প্রায় কাছাকাছি বা সমান। আসলে পরিমাপ দুইটি পরস্পর সমান।

তাহলে আমরা পরীক্ষামূলকভাবে সমতা বা সমান যে পরিমাপগুলো পেলাম, সেগুলোকে একত্রে লিখলে দাঁড়ায়,

১. বৃত্তকলার ব্যাসার্ধ = কোণকের হেলানো উচ্চতা

২. বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল = কোণকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল

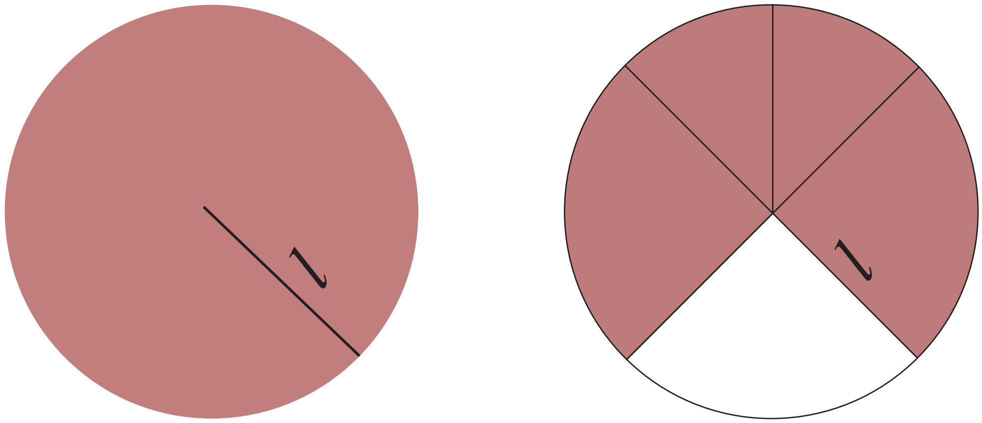
৩. বৃত্তকলার চাপের দৈর্ঘ্য = কোণকের ভূমি-বৃত্তের পরিধি

গাণিতিক সূত্র প্রতিপাদন

এতক্ষণ, সুতা বা স্কেল ব্যবহার করে পরিমাপগুলো হিসাব করলাম। কিন্তু সবসময় এত বেশি সময় নিয়ে এসব পরিমাপ করা যায় না। আবার, এভাবে পরিমাপ করলে হিসাব নিখুঁতও হয় না। নিখুঁতভাবে পরিমাপের জন্য গাণিতিক সূত্র প্রয়োজন। চলো আমরা এসব হিসাবের জন্য গাণিতিক সূত্র তৈরি করার চেষ্টা করি।

একক কাজ

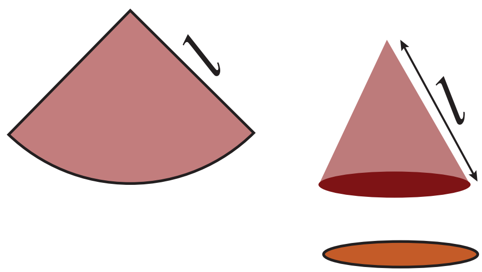
প্রত্যেকেই কাগজ কেটে আবার একটি করে বৃত্ত তৈরি করো। মনেকরো, তোমার বৃত্তের ব্যাসার্ধ l একক। তাহলে, এই বৃত্তের পরিধি $2\pi l$ একক এবং ক্ষেত্রফল πl^2 বর্গ একক। এখন, এই বৃত্তক্ষেত্রকে সমান চারভাগে ভাগ করো। অতঃপর একটি অংশকে কেটে নিচে রাখো।



আবার, কাগজটিকে মুড়িয়ে একটি কোণক তৈরি করো।

কোণকের ভূমির ক্ষেত্রফল

চলো আমরা কোণকের ভূমির ক্ষেত্রফল বের করি। তোমার তৈরিকৃত কোণকটি এক টুকরো কাগজের উপর রেখে পূর্বের ন্যায় এর চতুর্দিকে পেন্সিল বা কলম দ্বারা দাগ দিয়ে যে বৃত্তটি পেলে, এটিই কোণকের ভূমি। মনে করি, এই বৃত্তের ব্যাসার্ধ r একক। তাহলে, এই বৃত্তের ক্ষেত্রফল πr^2 বর্গ একক।

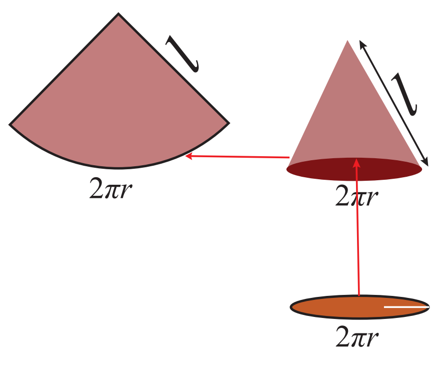


সুতরাং, কোণকের ভূমির ক্ষেত্রফল πr^2 বর্গ একক।

কোণকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল (Curved surface area of cone)

এখন চলো আমরা কোণকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল বের করি। তোমার অঙ্কিত বৃত্তের ব্যাসার্ধ r একক। তাহলে, এই বৃত্তের পরিধি $2\pi r$ একক।

বৃত্তের পরিধির সাথে বড়ো বৃত্তের পরিধির সম্পর্কটি কি তোমার মনে আছে? খেয়াল করো তোমরা বড়ো বৃত্তের যে বৃত্তকলা কেটে নিয়ে কোণক বানিয়েছিলে সেই বৃত্তকলার চাপের দৈর্ঘ্য, তোমাদের অঙ্কিত বৃত্তের পরিধির সমান; কারণ ওই বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্যকে মুড়িয়েই শেষোক্ত ভূমি-বৃত্তটি আঁকা হয়েছে।



$\therefore$ অঙ্কিত বৃত্তের পরিধি $=$ বড়ো বৃত্তের কর্তিত বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য।

আবার বড়ো বৃত্তের ব্যাসার্ধ l = কোণকের হেলানো উচ্চতা l.

অঙ্কিত বৃত্তের পরিধি $2\pi r$ একক হওয়ার কারণে বড়ো বৃত্তের কর্তিত বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্যও $2\pi r$ একক।

তাছাড়া, এই কর্তিত বৃত্তকলার ক্ষেত্রফলই কোণকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল; কারণ কর্তিত বৃত্তকলাকে মুড়িয়েই কোণকটি তৈরি করা হয়েছে। তাহলে আমাদের এই বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল বের করতে পারলেই কোণকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল বের হয়ে যাবে।

প্রথম পদ্ধতি

ইতোমধ্যে আমাদের কাছে যে তথ্য আছে তা হলো: বড়ো বৃত্তের পরিধি $2\pi l$ একক এবং ক্ষেত্রফল πl^2 বর্গ একক। বড়ো বৃত্তের পরিধিকে বৃত্তচাপ ধরে আমরা লিখতে পারি,

বৃত্তচাপ $2\pi l$ একক হলে ক্ষেত্রফল = πl^2 বর্গ একক

$\therefore$ বৃত্তচাপ 1 একক হলে ক্ষেত্রফল = $\dfrac{\pi l^2}{2\pi l}$ বর্গ একক

$\therefore$ বৃত্তচাপ $2\pi r$ একক হলে ক্ষেত্রফল = $\dfrac{\pi l^2}{2\pi l} \times 2\pi r$ বর্গ একক

= $\dfrac{\pi l.l}{l} \times r$ বর্গ একক

= πrl বর্গ একক

$\therefore$ বৃত্তের চাপ 2πr একক এর জন্য বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল πrl বর্গ একক।

এখন, কোণকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল = বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল

= πrl বর্গ একক

$\therefore$ কোণকের ভূমির ব্যাসার্ধ r একক এবং হেলানো উচ্চতা l একক হলে,

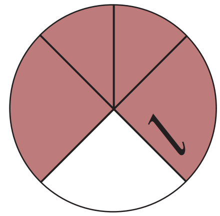
কোণকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল = πrl বর্গ একক।

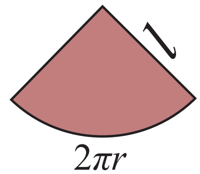
দ্বিতীয় পদ্ধতি

ইতোমধ্যে তোমার যা জানা আছে তা হলো: বড়ো বৃত্তের পরিধি $2\pi l$ একক এবং বৃত্তকলার চাপের দৈর্ঘ্য $2\pi r$ একক।

তোমার কি মনে আছে, বড়ো বৃত্তের পরিধি ও বৃত্তকলার চাপের দৈর্ঘ্যের মধ্যে চমৎকার একটি সম্পর্ক রয়েছে? অর্থাৎ, $2\pi l$ এবং $2\pi r$ এর মধ্যে একটি সম্পর্ক রয়েছে?

আসলে, বৃত্তকলার চাপের দৈর্ঘ্য, বড়ো বৃত্তের পরিধির এক-চতুর্থাংশ। অর্থাৎ,





$\therefore$ বড়ো বৃত্তের পরিধির এক-চতুর্থাংশ = বৃত্তকলার চাপের দৈর্ঘ্য

বা, $\dfrac{2\pi l}{4} = 2\pi r$

বা, $\dfrac{l}{4} = r$

$\therefore l = 4r \ldots \ldots \ldots (1)$

আবার, তোমরা কি বলতে পার- বড়ো বৃত্তের ক্ষেত্রফল πl^2 ও বৃত্তকলার ক্ষেত্রফলের মধ্যে একটি সম্পর্ক রয়েছে? অর্থাৎ, πl^2 এবং বৃত্তকলার ক্ষেত্রফলের মধ্যে কী সম্পর্ক রয়েছে?

আসলে, বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল = বড়ো বৃত্তের ক্ষেত্রফলের এক-চতুর্থাংশ

$= \dfrac{\pi l^2}{4}$ বর্গ একক

$= \dfrac{\pi l.l}{4}$ বর্গ একক

$= \dfrac{\pi l.4r}{4}$ বর্গ একক [(1) নং হতে $l = 4r$ বসাই]

$\therefore$ বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \pi rl$ বর্গ একক

এখন,

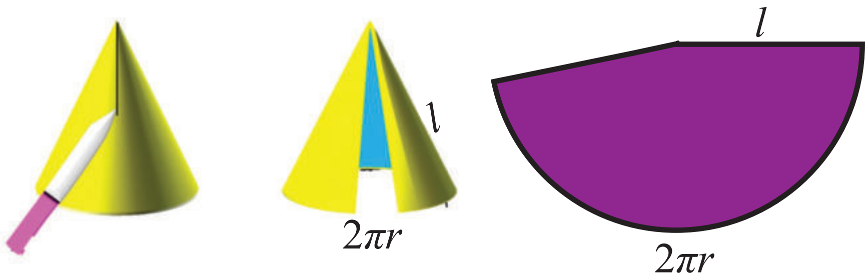
কোণকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল = বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল

$= \pi rl$ বর্গ একক

তৃতীয় পদ্ধতি

চলো আমরা আরেকটি পদ্ধতিতে কোণকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের কৌশল শিখে ফেলি।

ধাপ ১: যে কোনো একটি কোণক নিই। মনে করি, কোণকটির ভূমির ব্যাসার্ধ r একক এবং হেলানো তলের দৈর্ঘ্য l একক। তাহলে কোণকটির ভূমির পরিধি $2\pi r$ একক।



ধাপ ২: কোণকটিকে চিত্রের ন্যায় যত্নসহকারে কেটে ফেলো এবং কাগজের উপর বা ভূমিতে টান করে রেখে দাও। খেয়াল করলে দেখতে পাবে যে, কোণকের বক্রতল দ্বারা একটি বৃত্তকলা তৈরি হয়েছে যার কেন্দ্র কোণকের শীর্ষবিন্দু, ব্যাসার্ধ কোণকের হেলানো তলের দৈর্ঘ্য l একক এবং চাপের দৈর্ঘ্য কোণকের পরিধি $2\pi r$ একক।

স্কেল ব্যবহার করে বৃত্তকলাটির ব্যাসার্ধ পরিমাপ করো। অতপর বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করে নিচের ছকটি পূরণ করো।

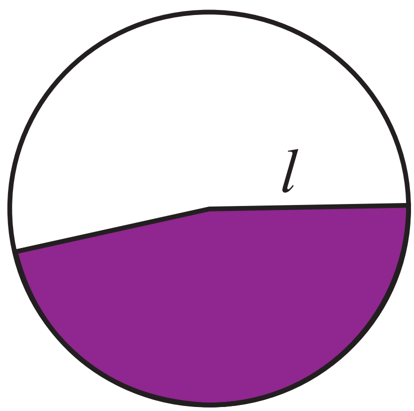
উপাদানের নাম	ব্যাসার্ধ	বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল
পরিমাপ		

এই বৃত্তকলার ক্ষেত্রফলই কোণকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল। কিন্তু আমরা গাণিতিক সূত্র তৈরি করতে চাই।

ধাপ ৩: কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ l একক ব্যবহার করে বৃত্তকলা সংশ্লিষ্ট বৃত্তটি এঁকে সম্পন্ন করি। তাহলে অঙ্কিত বৃত্তের পরিধি $2\pi l$ একক এবং ক্ষেত্রফল πl^2 বর্গ একক।

ধাপ ৪: কোনো বৃত্তচাপ দ্বারা বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল ওই বৃত্তচাপের সমানুপাতিক। সুতরাং,

$$\frac{\text{বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল}}{\text{সম্পূর্ণ বৃত্তের ক্ষেত্রফল}} = \frac{\text{বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য}}{\text{সম্পূর্ণ বৃত্তের দৈর্ঘ্য(পরিধি)}}$$



বা, $\dfrac{\text{বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল}}{\pi l^2} = \dfrac{2\pi r}{2\pi l}$

বা, বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \dfrac{2\pi r}{2\pi l} \times \pi l^2$

বা, বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \dfrac{r}{l} \times \pi l.l$

বা, বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \pi rl$

$\therefore$ বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \pi rl$ বর্গ একক।

এখন, কোণকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল = বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল

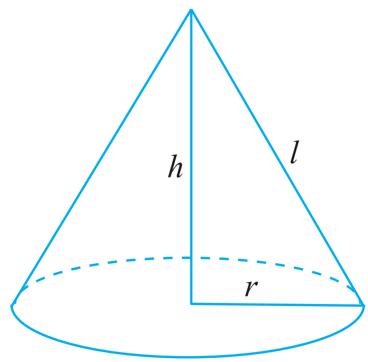
$\therefore$ কোণকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল = πrl বর্গ একক।

$\therefore$ কোণকের ভূমির ব্যাসার্ধ r একক এবং হেলানো উচ্চতা l একক হলে,

কোণকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল = πrl বর্গ একক

কোণকের উচ্চতা

কোণকের শীর্ষবিন্দু থেকে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্যই কোণকের উচ্চতা।



লক্ষ করো, কোণকের ভূমির ব্যাসার্ধ r, উচ্চতা h ও হেলানো তলের দৈর্ঘ্য l দ্বারা একটি ত্রিভুজ গঠিত হয়েছে। তোমরা কি বলতে পার এটি কোন ধরনের ত্রিভুজ?

একক কাজ

পাশের ত্রিভুজটি বিশ্লেষণ করে নিচের ছকটির ২নং সারি পূরণ করো।

1	কোণ অনুসারে ত্রিভুজটির নাম	r ও h বাহু দ্বারা উৎপন্ন কোণের মান	r ও h বাহুর নাম	l বাহুর নাম	r, h ও l বাহুর মধ্যে সম্পর্ক	ত্রিভুজটি সম্পর্কিত উপপাদ্যের নাম
2						

তোমরা নিশ্চয় বুঝতে পারছো, ভূমির ব্যাসার্ধ r, উচ্চতা h ও হেলানো তলের দৈর্ঘ্য l দ্বারা একটি সমকোণী ত্রিভুজ গঠিত হয়েছে যার অতিভুজ l. সুতরাং, পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী,

$$l^2 = r^2+h^2$$

$$\therefore l = \sqrt{r^2+h^2}$$

তাহলে, কোণকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল = πrl বর্গ একক

$= \pi r\sqrt{r^2+h^2}$ বর্গ একক

কোণকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল (Surface area of cone)

কোণকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল বলতে কোণকের ভূমির ক্ষেত্রফল ও কোণকের বক্রতলের ক্ষেত্রফলের সমষ্টিকে বোঝায়। সুতরাং,

কোণকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = কোণকের ভূমির ক্ষেত্রফল + কোণকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল

$= (\pi r^2 + \pi rl)$ বর্গ একক

$= \pi r(r + l)$ বর্গ একক

$= \pi r\ (r + \sqrt{r^2+h^2}\ )$ বর্গ একক

অন্যভাবে, কোণকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = $(\pi r^2 + \pi rl)$ বর্গ একক

$= \pi r^2 + \frac{1}{2}\,(2\pi r)l$ বর্গ একক

= ভূমির ক্ষেত্রফল + $\frac{1}{2}$ × ভূমির পরিসীমা × হেলানো উচ্চতা

$\therefore$ কোণকের ভূমির ব্যাসার্ধ r একক, উচ্চতা h একক এবং হেলানো উচ্চতা l একক হলে,

কোণকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = $\pi r(r + l)$ বর্গ একক

$= \pi r\ (r + \sqrt{r^2+h^2}\ )$ বর্গ একক

সমস্যা ১: তোমাদের একজন বন্ধুর জন্মদিনে তুমি কাগজ দিয়ে তৈরি কোণকাকৃতির একটি টুপি উপহার দিতে চাও যার উচ্চতা 35 সেমি। তোমার বন্ধুর মাথার পরিধি সুতা দিয়ে পরিমাপ করে তুমি 48 সেমি পেলে। টুপিটি তৈরি করতে তোমার কতটুকু কাগজ লাগবে?

সমস্যা ২: তোমার স্কুলের কয়েকজন বন্ধু একত্রে একটি বিজ্ঞানমেলায় অংশগ্রহণ করেছ। তোমাদের সমস্ত জিনিসপত্র রাখার জন্য তোমরা সেখানে মাঝখানে খুঁটি দিয়ে কোণক আকৃতির একটি তাবু বানাতে চাও যার উচ্চতা 5 মিটার। এই তাবু দ্বারা 150 বর্গমিটার ভূমি ঘিরতে চাইলে তাবুর জন্য কী পরিমাণ কাপড় লাগবে? প্রতি বর্গমিটার কাপড়ের দাম 160 টাকা হলে মোট কত খরচ হবে?

কোণকের আয়তন (Volume of cone)

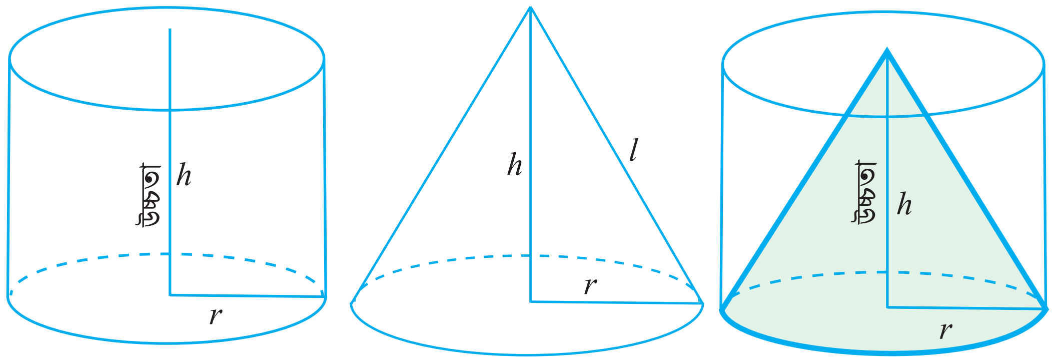
তোমরা ইতোমধ্যে কাগজ কেটে কোণক তৈরি করা শিখেছ এবং পূর্বের শ্রেণিগুলোতে সিলিন্ডার সম্পর্কে বিস্তারিত জেনেছ। চলো হাতে-কলমে আরও কিছু কাজ করি।

দলগত কাজ

শক্ত কাগজ বা কার্ডবোর্ড ব্যবহার করে অথবা খুব সহজে বাঁকানো যায় এমন প্লাস্টিক বোর্ড দ্বারা একটি সিলিন্ডার ও একটি কোণক এমনভাবে তৈরি করো যাতে উভয়ের ভূমি ও উভয়ের উচ্চতা সমান বা একই হয়।

সিলিন্ডারের নিচের ভূমি বা তলা কার্ডবোর্ড দ্বারা বন্ধ করে দাও এবং উপরের ভূমি-তল বা ঢাকনা খালি রাখো যাতে সিলিন্ডারের মাঝে কোনো কিছু রাখা যায়।

আবার, কোণকের ভূমিও খালি রাখো যাতে কোণকের মধ্যে কোনো কিছু রাখা যায়।



তোমার নির্মিত কোণক ও সিলিন্ডার সঠিকভাবে নির্মিত হয়েছে কিনা তা বোঝার জন্য শেষের চিত্রের মতো কোণকটিকে সিলিন্ডারের মধ্যে বসাও। কোণক ও সিলিন্ডার উভয়ের ভূমির ব্যাসার্ধ ও উচ্চতা সমান বা একই হয়েছে কিনা তা যাচাই করো। নির্মাণে ত্রুটি থাকলে সংশোধন করো। তাহলে তোমাদের কোণক ও সিলিন্ডার তৈরি হয়ে গেল।

আমাদের অপেক্ষার পালা শেষ। এখন চলো আমরা মজার মূল পর্বে যাই।

প্রথমে কোণকটি ঝালমুড়ি খাওয়া বা আইসক্রিম খাওয়ার মতো করে ধরো। তারপর কোণকটি কিছু চাউল বা ময়দা অথবা এমন অন্য কোনো উপাদান দ্বারা এমনভাবে পরিপূর্ণ করো যাতে কোণকের ভূমিতল উপাদান দ্বারা একটি সমতল হয়। তারপর ওই কোণকের উপাদানগুলো খালি সিলিন্ডারের মধ্যে ঢেলে দাও। দেখবে তাতে সিলিন্ডারের কিছু অংশ পূর্ণ হয়ে গেছে।

একইভাবে দ্বিতীয়বার খালি কোণকটি একই উপাদান দ্বারা পরিপূর্ণ করে ওই সিলিন্ডারের মধ্যে ঢেলে দাও। দেখবে সিলিন্ডারের বেশিরভাগ পূর্ণ হয়ে গেছে।

আগেরমত তৃতীয়বার খালি কোণকটি একই উপাদান দ্বারা পরিপূর্ণ করে ওই সিলিন্ডারের মধ্যে ঢেলে দাও। কী দেখতে পাচ্ছ? সিলিন্ডারটি কানায় কানায় পূর্ণ হয়ে গেছে।

কী মজা, তাই না? তিন কোণক উপাদান দ্বারা একটি সিলিন্ডার পূর্ণ হয়ে গেল।

উপরের পরীক্ষাটি তোমরা পানি বা অন্য কোনো তরল পদার্থ দ্বারাও করে দেখতে পার।

যেমন, সহজলভ্য পানি নিরোধক পলিথিন ব্যাগ কোণক এবং সিলিন্ডারের মধ্যে এমনভাবে প্রবেশ করাও যাতে কোণক বা সিলিন্ডারের মধ্যে পানি বা তরল পদার্থ ঢাললে বের হতে না পারে। তারপর পূর্বের ন্যায় পরপর তিন কোণক পানি বা যে কোনো তরল পদার্থ সিলিন্ডারের মধ্যে ঢালো দেখবে সিলিন্ডারটি ঠিক কানায় কানায় পরিপূর্ণ হয়ে যাবে।

আবার তুমি উল্টাভাবেও যাচাই করে দেখতে পার, ওই একই উপাদানে পরিপূর্ণ একটি সিলিন্ডার দ্বারা এমন তিনটি কোণক পরিপূর্ণ করা যায়।

তাহলে, আমরা হাতে-কলমে পরীক্ষা দ্বারা প্রমাণ করতে পারলাম যে, একই ভূমি ও উচ্চতাবিশিষ্ট একটি সিলিন্ডারের ধারণ ক্ষমতা তিনটি কোণকের ধারণ ক্ষমতার সমান।

সুতরাং, 3টি কোণকের আয়তন = 1টি সিলিন্ডারের আয়তন

আমরা পূর্বের শ্রেণিতে জেনেছি, সিলিন্ডারের ভূমির ব্যাসার্ধ r একক এবং উচ্চতা h একক হলে আয়তন $=\pi r^2 h$ ঘন একক।

অতএব, 3টি কোণকের আয়তন = $\pi r^2 h$ ঘন একক

$\therefore$ 1টি কোণকের আয়তন = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ ঘন একক

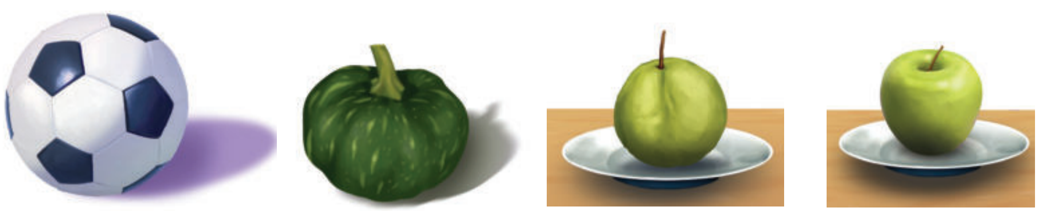
$\therefore$ কোণকের ভূমির ব্যাসার্ধ r একক এবং উচ্চতা h একক হলে,

কোণকের আয়তন = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ ঘন একক = $\frac{1}{3}$ × (ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা) ঘন একক।

সমস্যা ৩: তোমার জন্মদিনে তোমার ছয়জন বন্ধুকে তুমি নিমন্ত্রণ করেছ যাদের সবাইকে গৃহে তৈরি একটি করে কোণক আইসক্রিম খাওয়াতে চাও। আইসক্রিমটির ভূমির ব্যাস 6 সেমি ও উচ্চতা 15 সেমি। বন্ধুদের সাথে তোমার মা এবং তুমিও একটি করে আইসক্রিম খেতে চাও। তোমার মা বুঝতে পারছেনা কতটুকু আইসক্রিম তৈরি করতে হবে? কী পরিমাণ আইসক্রিম তৈরি করতে হবে তুমি কি তোমার মাকে আগেই পরিমাপ করে দিতে পারবে?

গোলক (Sphere)

তোমরা আগের শ্রেণিতে বৃত্ত সম্পর্কে জেনেছ। আবার কাগজ কেটে বৃত্ত তৈরি করাও শিখেছ। তোমরা কি নিচের বস্তুগুলোর নাম বলতে পার? নিশ্চয় এগুলোর নাম বলতে পারবে। কারণ এসব বস্তুসমূহ আমরা দৈনন্দিন জীবনে প্রতিনিয়তই ব্যবহার করে থাকি। এগুলোর মধ্যে কোনোটা খেলার সামগ্রী, কোনোটা ফল, আবার কোনোটা সবজি জাতীয় ফল।



কয়েক ধরনের বলের নাম: টেনিস বল, ক্রিকেট বল, ফুটবল, বাস্কেটবল

গোলাকার আকৃতির কয়েকটি ফল: পেয়ারা, কমলা, আপেল, মালটা

গোলাকার আকৃতির সবজি জাতীয় ফল: মিষ্টি কুমড়া

গোলাকার আকৃতির খেলার সামগ্রী: গোলক

গোলাকার আকৃতির পড়া-লেখার সামগ্রী: ভূগোলক

এ ধরনের গোলাকার আকৃতির আরও কয়েকটি বস্তুর নাম নিচের তালিকায় লেখো।

বেল				

তোমরা কি বলতে পার আমাদের দৈনন্দিন জীবনে ব্যবহৃত গোলাকার আকৃতির এসব বস্তুসমূহ কোন ধরনের বস্তু। এগুলো সবই ত্রিমাত্রিক বস্তু। এগুলোকে আমরা **গোলক** বলতে পারি।

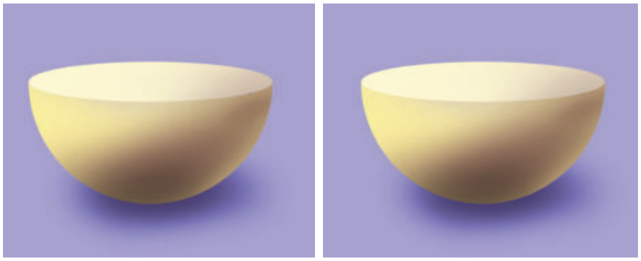
গোলক (Sphere): বৃত্তের ব্যাসকে স্থির রেখে বৃত্তটিকে ওই ব্যাসের চারদিকে ঘোরালে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয় তাকে গোলক বলে। ত্রিমাত্রিক জ্যামিতিতে গোলক হলো সুষম মসৃণ গোলাকার ঘনবস্তু।

আমরা যখন গোলক জাতীয় কোনো ফল বা সবজি খাই তখন এগুলোর গায়ে কতটুকু ছাল বা খোসা আছে তা জানার প্রয়োজনবোধ করি না। কিন্তু যখন একটি ফুটবল তৈরি করতে যাই, তখন এর গায়ের চতুর্দিকে কতটুকু চামড়া বা এ জাতীয় উপাদান দরকার তা জানার প্রয়োজন বোধ করি। অতএব, চামড়া বা এ জাতীয় উপাদানের ক্ষেত্রফল জানা জরুরি হয়ে পড়ে। সুতরাং, আমাদের দৈনন্দিন জীবন-যাপন সুষ্ঠভাবে পরিচালনার জন্যই এধরনের ঘনবস্তুর পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল জানা অতীব জরুরি। চলো আমরা বাস্তব জীবনে ব্যবহৃত এ জাতীয় ঘনবস্তুর বা গোলকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করার কৌশল শিখে ফেলি।

গোলকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল (Surface area of sphere)

দলগত কাজ

ধাপ ১: একটি গোলক জাতীয় বস্তু যেমন প্লাস্টিকের টেনিস বল নাও।



ধাপ ২: বলটির ঠিক মাঝ বরাবর কেটে চিত্রের ন্যায় দুইটি অর্ধগোলকে পরিণত করো। দেখতে পাবে অর্ধগোলক দুইটির যে বরাবর কাটা হয়েছে সে বরাবর গোলাকার তৈরি হয়েছে।

ধাপ ৩: যে কোনো একটি অর্ধগোলক নাও এবং কাটা দিক উপুড় করে বা নিচের দিকে করে এক টুকরো কাগজের ওপর রাখো; অতঃপর অর্ধগোলকের চারদিকে খাতার ওপর পেন্সিল বা কলম দ্বারা দাগ দাও এবং অর্ধগোলকটিকে কাগজের উপর থেকে তুলে নাও।

কী দেখতে পাচ্ছ? কাগজের উপর যে চিত্র অঙ্কিত হয়েছে তা কি তুমি চিনতে পার? বলো তো এটি কীসের চিত্র? হ্যাঁ, এটি একটি বৃত্ত।

ধাপ ৪: একটি কাঁচি দিয়ে বৃত্তটি যত্ন সহকারে কেটে নাও। তারপর বৃত্তটির ব্যাসার্ধ পরিমাপ করো। অতঃপর বৃত্তটির ক্ষেত্রফল পরিমাপ করে নিচের ছকটি পূরণ করো।

উপাদানের নাম	ব্যাসার্ধ	ক্ষেত্রফল
পরিমাপ		

তুমি যে বৃত্তটি কেটে পেয়েছ, অন্য কাগজ ব্যবহার করে ওই একই পরিমাপের আরেকটি বৃত্ত কেটে নাও। তারপর বৃত্ত দুইটিকে সুবিধাজনকভাবে ছোটো ছোটো করে কেটে আঠা দিয়ে অর্ধগোলকের উপর লাগাও বা সেঁটে দাও। দেখতে পাবে, সম্পূর্ণ অর্ধগোলকটি বৃত্ত দুটির কাগজের টুকরা দ্বারা ঢেকে গেছে এবং কোনো কাগজের টুকরো অবশিষ্ট নেই। তাহলে দেখা যাচ্ছে যে, অর্ধগোলকটির উপরিতলের ক্ষেত্রফল ওই দুটি বৃত্তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান। অতএব, পূর্ণ গোলকটির ক্ষেত্রফল এমন চারটি বৃত্তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান।

উপরের ছক থেকে একটি বৃত্তের ক্ষেত্রফলের পরিমাপ দেখে এমন চারটি বৃত্তের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি পরিমাপ করো; অতঃপর নিচের ছকটি পূরণ করো।

দুইটি বৃত্তের ক্ষেত্রফল	চারটি বৃত্তের ক্ষেত্রফল	অর্ধ-গোলকের উপরিতলের ক্ষেত্রফল	গোলকের ক্ষেত্রফল

যাহোক হাতে-কলমে তুমি গোলকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল বের করতে পারলে।

চলো এখন গোলকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফলের গাণিতিক সূত্র নির্ণয় করার চেষ্টা করি।

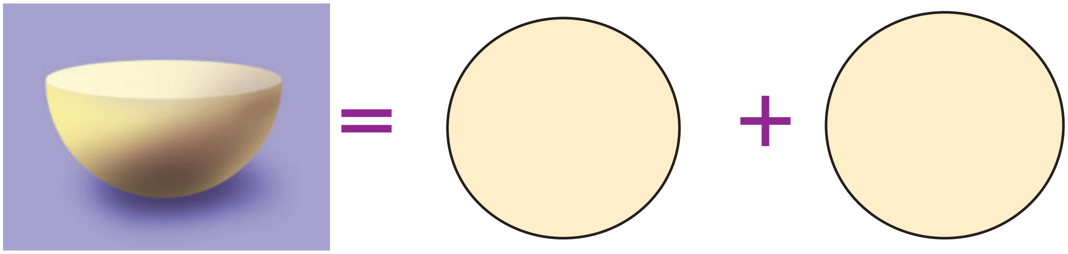
মনে করো, তুমি যে বৃত্তটি কেটে নিয়েছিলে, সেই বৃত্তের ব্যাসার্ধ r একক। তাহলে বুঝতেই পারছো, গোলকের ব্যাসার্ধও r একক।

তোমরা পূর্বের শ্রেণিতে শিখেছ, যে বৃত্তের ব্যাসার্ধ r একক, তার ক্ষেত্রফল πr^2 বর্গ একক। তাহলে তোমার অঙ্কিত বৃত্তের ক্ষেত্রফলও πr^2 বর্গ একক।

এখানে আমরা বলতে পারি,

অর্ধগোলকটির উপরিতলের ক্ষেত্রফল = দুইটি বৃত্তের ক্ষেত্রফলের যোগফল।

নিচের চিত্রের সাহায্যে দেখানো যায়

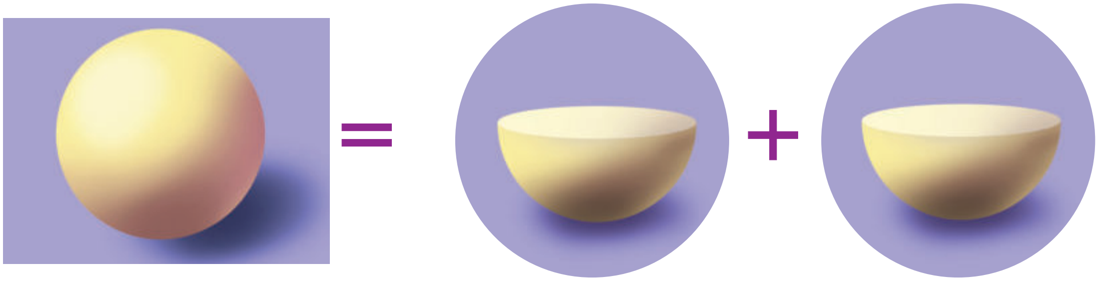


অর্ধগোলকের উপরিতলের ক্ষেত্রফল = $(\pi r^2 + \pi r^2)$ বর্গ একক

$= 2\pi r^2$ বর্গ একক

এখন, একটি পূর্ণগোলকের ক্ষেত্রফল = দুইটি অর্ধগোলকের উপরিতলের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি

নিচের চিত্রের সাহায্যে দেখানো যায়:



গোলকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল = $(2\pi r^2 + 2\pi r^2)$ বর্গ একক

$= 4\pi r^2$ বর্গ একক

$\therefore$ গোলকের ব্যাসার্ধ r একক হলে, গোলকের ক্ষেত্রফল = $4\pi r^2$ বর্গ একক।

সমস্যা ১: দিন-রাত্রি কীভাবে সংঘটিত হয় তা পরীক্ষা করার জন্য তুমি পাতলা প্লাস্টিক পেপার দিয়ে 16 সেমি ব্যাসের একটি ভূগোলক বানাতে চাও। প্রতি বর্গসেমি প্লাস্টিক পেপারের দাম পাঁচ টাকা হলে ভূগোলকটি বানাতে তোমার মোট কত টাকার প্লাস্টিক পেপার লাগবে?

সমস্যা ২: একটি নিরেট অর্ধগোলকের ব্যাস 10 সেমি। অর্ধগোলকটির বক্রতল বা উপরিতলের ক্ষেত্রফল, ও সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো। সমগ্র অর্ধগোলকটি রং করতে প্রতি বর্গ সেন্টিমিটারে 2 টাকা খরচ হলে মোট কত টাকার প্রয়োজন?

গোলকের আয়তন (Volume of sphere)

আমাদের দৈনন্দিন জীবনে আমরা যখন পেয়ারা বা আপেল খাই, তখন এতটুকু সবাই বুঝি যে, ছোটো পেয়ারা বা আপেলে যতটুকু পরিমাণ খাদ্যবস্তু আছে; বড়ো পেয়ারা বা আপেলে তারচেয়ে বেশি পরিমাণ খাদ্যবস্তু আছে। কিন্তু যদি বলা হয় যে কোনো একটি পেয়ারা বা আপেলে ঠিক কতটুকু পরিমাণ খাদ্যবস্তু আছে, তখন কিন্তু আমরা সঠিক করে বলতে পারি না। সঠিকভাবে ওই পেয়ারা বা আপেলর খাদ্যবস্তু পরিমাণ জানার জন্য আয়তন নির্ণয় করার প্রয়োজন হয়।

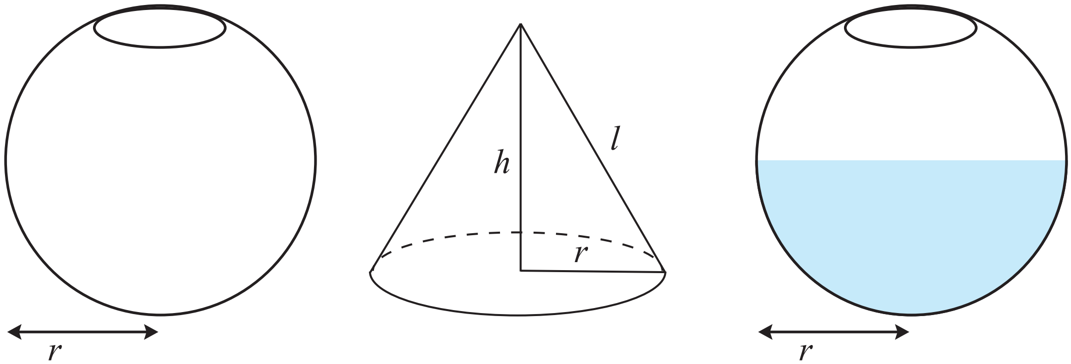
মনে করো, তোমার বাড়িতে তুমি একটি গোলাকার অ্যাকুরিয়াম বানাতে চাও। তোমার অ্যাকুরিয়ামের দুই-তৃতীয়াংশ তুমি পানিপূর্ণ করতে চাও এবং এক-তৃতীয়াংশ বায়ুপূর্ণ করে রাখতে চাও। তাহলেও তোমার একুরিয়ামের আয়তন নির্ণয় করার প্রয়োজন হয়।

আবার একটি ফুটবলের মধ্যে কতটুকু ফাঁকা বা শূন্যস্থান রাখতে হবে তা জানার জন্যও ফুটবলের আয়তন জানার প্রয়োজন হয়।

প্রাত্যহিক জীবনের যে কয়েকটি সমস্যার কথা উপরে আলোচনা করা হলো সেগুলো সবই গোলক জাতীয় বস্তু এবং গোলকের আয়তন বিষয়ক সমস্যা। তাহলে আমাদের গোলকের আয়তন কীভাবে নির্ণয় করতে হয় তা জানা দরকার। চলো আমরা গোলকের আয়তন নির্ণয় করার কৌশল শিখি।

দলগত কাজ

তোমাদের নিজ উদ্যোগে প্রত্যেকটি দলে একটি করে প্লাস্টিকের খেলনা বল সংগ্রহ করো। বলটি এমন হবে যাতে তার মধ্যে পানি প্রবেশ করানো বা বের করা যায়। তারপর বলটির ব্যাসার্ধ পরিমাপ করে তোমাদের খাতায় লিখে রাখো। তোমরা তো ইতোমধ্যে কোণক তৈরি করা শিখেছ। তুমি এমনভাবে একটি কোণক তৈরি করো যাতে কোণকের ভূমির ব্যাসার্ধ ওই বলের ব্যাসার্ধের সমান হয়। তাছাড়া আরও খেয়াল রাখতে হবে, কোণকের উচ্চতা যেন বলের ব্যাসের সমান হয়। কোণকটিকে সহজলভ্য পলিথিন বা অন্য কোনো উপাদান দ্বারা পানি নিরোধক করো যাতে এর মধ্যে পানি ঢালা যায়।



নির্মাণে ত্রূটি থাকলে সংশোধন করো। তাহলে তোমাদের কোণক ও বল প্রস্তুত হয়ে গেল।

আমাদের অপেক্ষার পালা শেষ। এখন চলো আমরা মজার মূল পর্বে যাই।

প্রথমে কোণকটিতে পানি ভরা যায় এমন করে ধরো। তারপর কোণকটি পানিপূর্ণ করে ফাঁকাবলের মধ্যে ঢেলে দাও। বলটি স্বচ্ছ থাকলে দেখতে পারবে বলের মোটামুটি অর্ধাংশ পূর্ণ হয়ে গেছে।

একইভাবে দ্বিতীয়বার খালি কোণকটি পানিপূর্ণ করে ওই বলের মধ্যে ঢেলে দাও।

কী লক্ষ করছো? বলটি কানায় কানায় পানিপূর্ণ হয়ে গেছে।

কি মজা, তাই না? দুই কোণক পানি দ্বারা একটি বল পূর্ণ হয়ে গেল।

আবার তুমি উল্টাভাবেও যাচাই করে দেখতে পার; পানিপূর্ণ একটি বলের পানি দ্বারা এমন দুইটি কোণক পরিপূর্ণ করা যায় এবং বলের মধ্যে আর কোনো পানি অবশিষ্ট থাকে না।

তাহলে, আমরা হাতে-কলমে পরীক্ষা দ্বারা প্রমাণ করতে পারলাম যে, কোণকের ভূমির ব্যাসার্ধ ও গোলকের ব্যাসার্ধ সমান হলে এবং কোণকের উচ্চতা গোলকের ব্যাসের সমান হলে একটি গোলকের ধারণ ক্ষমতা দুইটি কোণকের ধারণ ক্ষমতার সমান।

সুতরাং, 1টি গোলকের আয়তন $=$ 2টি কোণকের আয়তন

আমরা জেনেছি, কোণকের ভূমির ব্যাসার্ধ r একক এবং উচ্চতা h একক হলে, আয়তন $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ঘন একক।

অতএব, 2টি কোণকের আয়তন $= \frac{2}{3}\pi r^2 h$ ঘন একক

1টি গোলকের আয়তন $=$ 2টি কোণকের আয়তন

$\therefore$ 1টি গোলকের আয়তন $= \frac{2}{3}\pi r^2 h$ ঘন একক

বা, 1টি গোলকের আয়তন $= \dfrac{2}{3}\pi r^2.2r$ ঘন একক   [এখানে $h = 2r$]

$\therefore$ 1টি গোলকের আয়তন $= \dfrac{4}{3}\pi r^3$ ঘন একক

$\therefore$ গোলকের ব্যাসার্ধ r একক হলে, গোলকের আয়তন $= \dfrac{4}{3}\pi r^3$ ঘন একক

সমস্যা ৩: একটি ফাঁপা লোহার গোলকের বাইরের ব্যাসার্ধ 8 সেমি এবং লোহার বেধ 3 সেমি। গোলকটির ফাঁপা অংশের আয়তন কত? তাছাড়া ওই গোলকে ব্যবহৃত লোহা দিয়ে একটি নিরেট গোলক তৈরি করলে এবং নিরেট গোলকটি রং করতে প্রতি বর্গ সেন্টিমিটারে 1.75 টাকা খরচ হলে, মোট কত টাকা লাগবে?

সমস্যা ৪: 5 সেমি, 7 সেমি ও 11 সেমি ব্যাসার্ধবিশিষ্ট তিনটি নিরেট প্লাস্টিকের বল গলিয়ে আরেকটি নতুন নিরেট বল তৈরি করা হলো। নতুন বলের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

প্রিজম (Prism)

আমরা দৈনন্দিন জীবনে কত কিছুই ব্যবহার করি। নিচের বস্তুগুলোও তার ব্যতিক্রম নয়। এখানে কয়েকটি বসার টুল, টেবিল ইত্যাদি দেখা যাচ্ছে। আবার শেষের বস্তুটিও টুল হিসাবে অনেকে ব্যবহার করেন। আবার শহরের লোকেরা সৌখিনভাবে ঘরের মধ্যে মাছ পালনের জন্যও শেষের বস্তুটি ব্যবহার করেন, যার নাম অ্যাকুরিয়াম। তো যাই হোক, এদের সবগুলোই একেকটি ঘনবস্তু। এ ধরনের আরও কত কিছুই তো আমরা প্রতিদিন ব্যবহার করে থাকি।

তোমার কি এ ধরনের আরও কিছু জিনিস বা ঘনবস্তুর নাম লিখে একটি তালিকা তৈরি করতে পারবে? তবে উপরের বস্তুগুলোর বিশেষ বৈশিষ্ট্য হলো প্রত্যকটি বস্তুর উপরের তল ও নিচের তল পরস্পর সমান। গণিতের ভাষায় এটিকে সর্বসম বলা হয়। তাছাড়া উপরের তল ও নিচের তল দুইটি পরস্পর সমান্তরালও বটে। আর পার্শ্বতলগুলো আয়তক্ষেত্র বা সামান্তরিক। এগুলোকে আমরা **প্রিজম** বলে থাকি।

প্রিজম (Prism): যে ঘনবস্তুর দুই প্রান্ত পরস্পর সর্বসম ও সমান্তরাল বহুভুজ এবং পার্শ্বতলগুলো সামান্তরিক তাই প্রিজম। প্রিজমের দুই প্রান্তে অবস্থিত পরস্পর বিপরীত, সর্বসম ও সমান্তরাল তল দুইটিকে **প্রিজমের ভূমি** বলে। আর ভূমি ছাড়া অন্যান্য তলগুলোকে **প্রিজমের পার্শ্বতল** বলে অভিহিত করা হয়। প্রিজমের পার্শ্বতলগুলো আয়তাকার হলে ওই প্রিজমকে **খাড়া প্রিজম বা সমপ্রিজম** বলে। অন্যদিকে প্রিজমের পার্শ্বতলগুলো আয়তাকার না হয়ে অন্য আকৃতির হলে ওই **প্রিজমকে তির্যক প্রিজম বা হেলানো প্রিজম** বলে।

প্রিজমের ভূমি-তলের আকৃতি অনুসারে প্রিজমের নামকরণ করা হয়ে থাকে। যেমন – কোনো প্রিজমের ভূমি ত্রিভুজাকৃতির হলে তাকে বলা হয় ত্রিভুজাকার প্রিজম। তেমনিভাবে কোনো প্রিজমের ভূমি চতুর্ভুজাকৃতির হলে তাকে বলা হয় চতুর্ভুজাকার প্রিজম, কোনো প্রিজমের ভূমি পঞ্চভুজাকৃতির হলে তাকে বলা হয় পঞ্চভুজাকার প্রিজম, ইত্যাদি।

তোমরা কি বলতে পারবে উপরের বস্তুগুলো কোন ধরনের প্রিজম? উপরের চিত্রগুলো দেখে কোন বস্তুটি ভূমি-তল অনুসারে কোন ধরনের প্রিজম তা বুঝে নিচের তালিকাটি পূর্ণ করো।

বস্তু নং	১ম বস্তু	২য় বস্তু	৩য় বস্তু	৪র্থ বস্তু
প্রিজমের ধরন	চতুর্ভুজাকার প্রিজম			

প্রিজমের ভূমি যে আকৃতির বহুভুজই হোক না কেন, ওই বহুভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য পরস্পর সমান হলে তাকে সুষম প্রিজম বলে। অর্থাৎ, প্রিজমের ভূমি সমবাহুবিশিষ্ট বহুভুজ বা সুষম বহুভুজ হলে তাকে **সুষম প্রিজম** বলে। আর প্রিজমের ভূমি সুষম বহুভুজ না হলে তাকে **বিষম প্রিজম** বলে। সুষম প্রিজমের আরেকটি নাম হলো **নিয়মিত প্রিজম** (regular prism)। অর্থাৎ, সুষম প্রিজম, নিয়মিত প্রিজম বলে সমধিক পরিচিত। আর বিষম প্রিজম, **অনিয়মিত প্রিজম** (irregular prism) বলে পরিচিত।

প্রিজমের ভূমিতলদ্বয়ের মধ্যবর্তী দুরত্বকে প্রিজমের উচ্চতা বলে ধরা হয়।

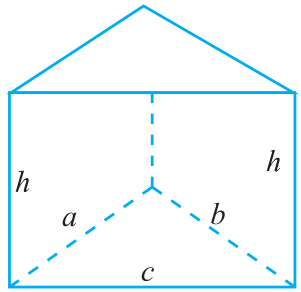
তাহলে প্রিজমের বৈশিষ্ট্যগুলো বিশ্লেষণ করলে লক্ষ করা যায় যে, আয়তাকার ঘনবস্তু ও ঘনক প্রত্যেকেই একেকটি প্রিজম। তোমরা কি এখন বলতে পারবে আয়তাকার ঘনবস্তু ও ঘনক কোন ধরনের প্রিজম। প্রিজম সম্পর্কে তোমার ধারণাগুলো একত্রিত করে প্রযোজ্যক্ষেত্রে খালি ঘরে ☑ চিহ্ন দিয়ে ছকটি পূরণ করো।

	খাড়া বা সমপ্রিজম	তির্যক/হেলানো প্রিজম	সুষম/নিয়মিত প্রিজম	বিষম/অনিয়মিত প্রিজম
আয়তাকার ঘনবস্তু				
ঘনক				

প্রিজমের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল (Surface area of prism)

আমরা এখন প্রিজমের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল বের করার চেষ্টা করব। প্রিজমের মোট দুইটি ভূমি ও কতকগুলো পার্শ্বতল রয়েছে। এই ভূমি ও পাশ্বতলগুলোর ক্ষেত্রফলই প্রিজমের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল।

$\therefore$ প্রিজমের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = দুইটি ভূমির ক্ষেত্রফল + পার্শ্বতলগুলোর ক্ষেত্রফল



প্রথমে আমরা ত্রিভুজাকার প্রিজমের ক্ষেত্রফল বের করার সূত্র তৈরি করব। এই ত্রিভুজাকার প্রিজমের দুইটি ভূমি ও তিনটি পার্শ্বতল রয়েছে। আবার পার্শ্বতলগুলোর প্রত্যেকটি একেকটি আয়তক্ষেত্র।

সুতরাং, এই প্রিজমের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল হবে দুইটি ভূমির ক্ষেত্রফল ও তিনটি আয়তাকার পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান।

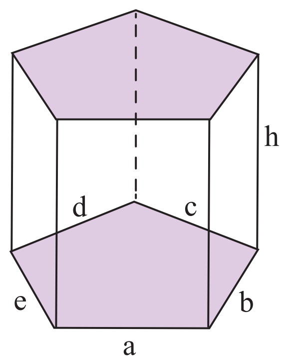
$\therefore$ প্রিজমের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = $2 \times$ (ভূমির ক্ষেত্রফল) + তিনটি আয়তাকার পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল

= $2 \times$ (ভূমির ক্ষেত্রফল) + $(a \times h + b \times h + c \times h)$ [চিত্রানুযায়ী]

= $2 \times$ (ভূমির ক্ষেত্রফল) + $(a + b + c) \times h$

= $\{2 \times$ (ভূমির ক্ষেত্রফল) + ভূমির পরিসীমা$\times$ উচ্চতা$\}$ বর্গ একক

এবার, আমরা পঞ্চভুজাকার প্রিজমের ক্ষেত্রফল বের করার সূত্র তৈরি করি। এই পঞ্চভুজাকার প্রিজমের দুইটি সর্বসম ভূমি ও পাঁচটি পার্শ্বতল রয়েছে। এক্ষেত্রেও, পার্শ্বতলগুলোর সবকয়টি একেকটি আয়তক্ষেত্র।



$\therefore$ প্রিজমের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = $2 \times$ (ভূমির ক্ষেত্রফল) + পাঁচটি আয়তাকার পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল

= $2 \times$ (ভূমির ক্ষেত্রফল) + $(a \times h + b \times h + c \times h + d \times h + e \times h)$ [চিত্রানুযায়ী]

= $2\times$ (ভূমির ক্ষেত্রফল) + $(a + b + c + d + e) \times h$

= $\{2\times$ (ভূমির ক্ষেত্রফল) + ভূমির পরিসীমা$\times$ উচ্চতা$\}$ বর্গ একক

> $\therefore$ প্রিজমের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = $\{2 \times$ (ভূমির ক্ষেত্রফল) + ভূমির পরিসীমা$\times$ উচ্চতা$\}$ বর্গ একক

এখন, প্রিজমের ভূমিতল একটি সুষম বহুভুজ হলে অর্থাৎ, ভূমি বহুভুজের প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য পরস্পর সমান হলে

$\therefore$ প্রিজমের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= 2 \times$ (ভূমির ক্ষেত্রফল) $+ (a + b + c + d + e) \times h$

$= 2 \times$ (ভূমির ক্ষেত্রফল) $+ (a + a + a + a + a) \times h$

$= 2 \times$ (ভূমির ক্ষেত্রফল) $+ (5a \times h)$

$= 2 \times$ (ভূমির ক্ষেত্রফল) + (বাহুর সংখ্যা $\times$ বাহুর দৈর্ঘ্য $\times$ উচ্চতা) বর্গ একক

সুতরাং, সুষম প্রিজমের ভূমির বাহুর সংখ্যা n এবং প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য a হলে,

$\therefore$ প্রিজমের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= 2 \times$ (ভূমির ক্ষেত্রফল) $+ (na \times h)$ বর্গ একক

$= 2\times$ (ভূমির ক্ষেত্রফল) + (বাহুর সংখ্যা $\times$ বাহুর দৈর্ঘ্য $\times$ উচ্চতা) বর্গ একক

$\therefore$ সুষম প্রিজমের ভূমির বাহুর সংখ্যা n এবং প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য a একক হলে,

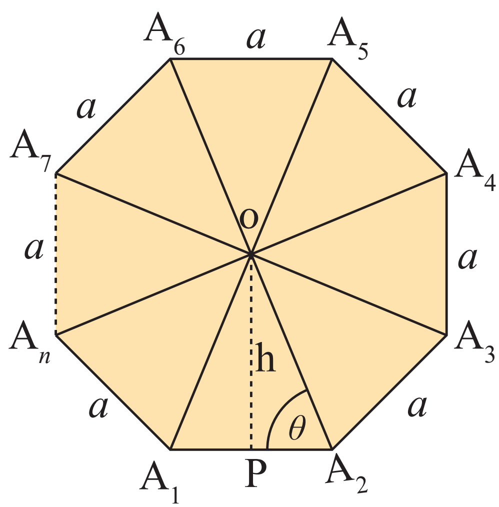
$\therefore$ প্রিজমের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= 2 \times$ (ভূমির ক্ষেত্রফল) $+ (na \times h)$ বর্গ একক

$= 2 \times$ (ভূমির ক্ষেত্রফল) + (বাহুর সংখ্যা $\times$ বাহুর দৈর্ঘ্য $\times$ উচ্চতা) বর্গ একক

সুষম বহুভুজের ক্ষেত্রফল (Area of regular polygon)

আমরা পূর্বের শ্রেণিগুলোতে ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা শিখেছি। কিন্তু পঞ্চভুজ, ষড়ভুজ, সপ্তভুজ, অষ্টভুজ বা এর চেয়ে বেশি কোনো বহুভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা তো জানতে হবে। চলো আমরা যে কোনো সুষম বহুভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা শিখি।

মনে করি, n সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 \ldots \ldots A_n$ একটি সুষম বহুভুজ যার কেন্দ্র O এবং প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য a একক। O, A_1; O, A_2; O, A_3; O, A_4; O, A_5;......; O, A_n যোগ করি। n সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট সুষম বহুভুজের কেন্দ্র ও শীর্ষবিন্দুগুলো পরস্পর যোগ করলে n সংখ্যক সর্বসম সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়। অতএব, ছোটো ছোটো ত্রিভুজগুলোর প্রত্যেকেই পরস্পর সর্বসম সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ। সুষম বহুভুজের কেন্দ্র বলতে বহুভুজের অন্তঃবৃত্তের কেন্দ্রকে বোঝায়।



একটি সুষম বহুভুজের সবগুলো বাহুর দৈর্ঘ্য পরস্পর সমান হওয়ার কারণে এর কোণগুলোও পরস্পর সমান। সুতরাং, n সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট সুষম বহুভুজের কোণের সংখ্যাও হবে nটি।

প্রথমে আমরা যে কোনো একটি ত্রিভুজ, যেমন ΔOA_1A_2 এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করি। ধরি, ΔOA_1A_2 এর উচ্চতা $OP = h$ এবং $\angle OA_2A_1 = \theta$

$$\therefore \angle A_1A_2A_3 = \angle OA_2A_1 + \angle OA_2A_3$$
$$= \theta + \theta$$
$$= 2\theta$$

সুতরাং, সুষম বহুভুজের প্রত্যেকটি শীর্ষকোণের পরিমাপ 2θ.

$\therefore$ সুষম বহুভুজের n সংখ্যক শীর্ষকোণের পরিমাপ $n \times 2\theta = 2n\theta$.

আবার, সুষম বহুভুজের কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণের পরিমাপ $360°$.

তাহলে n সংখ্যক শীর্ষকোণ ও কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণের সমষ্টি $= 2n\theta + 360°$.

তাছাড়া, ΔOA_1A_2 এর তিন কোণের সমষ্টি $180°$.

$\therefore$ n সংখ্যক ত্রিভুজের কোণের সমষ্টি $= n \times 180°$.

এখন, n সংখ্যক শীর্ষকোণ ও কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণের সমষ্টি $=$ n সংখ্যক ত্রিভুজের কোণের সমষ্টি

$$\therefore 2n\theta + 360° = n \times 180°$$

or, $2n\theta = n\times180° - 360°$

or, $\theta = \dfrac{n \times 180° - 360°}{2n}$

or, $\theta = \dfrac{n \times 180°}{2n} - \dfrac{360°}{2n}$

$$\therefore \theta = 90° - \frac{180°}{n}$$

এখন, $\tan\theta = \dfrac{OP}{PA_2} = \dfrac{h}{\frac{a}{2}} = \dfrac{2h}{a}$ [যেহেতু $PA_1 = PA_2 = \dfrac{a}{2}$]

or, $\tan\theta = \dfrac{2h}{a}$

or, $2h = a \tan\theta$

$$\therefore h = \frac{a}{2} \tan\theta$$

এখন, ΔOA_1A_2 এর ক্ষেত্রফল $= (\frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা$)$ বর্গ একক

$$= \frac{1}{2} \times A_1A_2 \times h$$

$$= \frac{1}{2} a . \frac{a}{2} \tan\theta \qquad \left[\text{যেহেতু } h = \frac{a}{2} \tan\theta\right]$$

$$= \frac{a^2}{4} \tan\left(90° - \frac{180°}{n}\right) \qquad \left[\text{যেহেতু } \theta = 90° - \frac{180°}{n}\right]$$

$$= \frac{a^2}{4} \cot\left(\frac{180°}{n}\right) \qquad \left[\text{যেহেতু } \tan(90° - \alpha) = \cot\alpha\right]$$

$A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 \ldots A_n$ বহুভুজের ক্ষেত্রফল $= n \times \Delta OA_1A_2$ এর ক্ষেত্রফল

$$= \frac{na^2}{4} \cot\left(\frac{180°}{n}\right)$$

$\therefore$ n সংখ্যক a দৈর্ঘ্যের বাহুবিশিষ্ট সুষম বহুভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{na^2}{4} \cot\left(\frac{180°}{n}\right)$ বর্গ একক।

সমস্যা ১: একটি ত্রিভুজাকৃতি প্রিজমের ভূমির বাহু তিনটির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 7 সেমি, 8 সেমি ও 10 সেমি এবং উচ্চতা 17 সেমি। প্রিজমটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

সমস্যা ২: একটি সুষম পঞ্চভুজাকৃতি প্রিজম সদৃশ স্তম্ভের ভূমির প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য 3.5 মি. এবং স্তম্ভটির উচ্চতা 12 মি.। স্তম্ভটির পার্শ্বতলগুলোর ক্ষেত্রফল ও সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

প্রিজমের আয়তন (Volume of prism)

ঘনবস্তুর আয়তন দারুণ একটি মজার ব্যাপার। বিভিন্ন প্রকার ঘনবস্তু বিশ্লেষণ করলে লক্ষ করা যায় যে, যেসব ঘনবস্তুর আকৃতি আগা-গোড়া সমান পরিধিবিশিষ্ট অর্থাৎ, একদিকে সরু এবং একদিকে মোটা এমন নয়; সেসব ঘনবস্তুর ভূমির ক্ষেত্রফলকে উচ্চতা দ্বারা গুণ করলে আয়তন পাওয়া যায়। যেমন -আয়তাকার ঘনবস্তু, ঘনক, সিলিন্ডার ইত্যাদি। প্রিজমও এমন একটি ঘনবস্তু যার আগা-গোড়া সমান পরিধিবিশিষ্ট। তাই প্রিজমেরও ভূমির ক্ষেত্রফলকে এর উচ্চতা দ্বারা গুণ করলে আয়তন পাওয়া যায়।

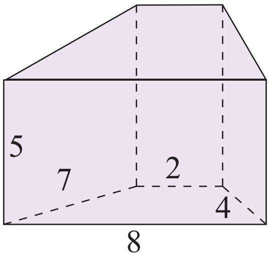
$\therefore$ প্রিজমের আয়তন = (ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা) ঘন একক।

$\therefore$ প্রিজমের আয়তন = (ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা) ঘন একক।

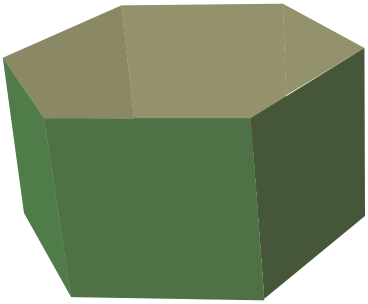
সমস্যা ৩: একটি ত্রিভুজাকার প্রিজমের ভূমির বাহু তিনটির দৈর্ঘ্য 5 সেমি, 12 সেমি ও 13 সেমি এবং উচ্চতা 41 সেমি। প্রিজমটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় করো।

সমস্যা ৪: একটি সুষম চতুর্ভুজাকার প্রিজম সদৃশ খুঁটির ভূমির প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য 12 সেমি. এবং খুঁটিটির উচ্চতা 17 মি.। খুঁটিটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় করো।

সমস্যা ৫: চিত্রে একটি অনিয়মিত খাড়া চতুর্ভুজাকার প্রিজম সদৃশ ঘনবস্তুর ধারগুলোর দৈর্ঘ্য মিটার এককে দেওয়া আছে। ঘনবস্তুটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় করো।



সমস্যা ৬: পাশের নিয়মিত সমপ্রিজম আকৃতির অ্যাকুরিয়ামের ভূমির প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 15 সেমি. এবং উচ্চতা 18 সেমি.। এ্যাকুরিয়ামটির বাইরে রং করতে প্রতি বর্গ সেন্টিমিটারে 20 টাকা খরচ হলে মোট কত টাকা দরকার হবে? আবার অ্যাকুরিয়ামটি রঙিন পানি দ্বারা পূর্ণ করতে প্রতি ঘন সেন্টিমিটারে 15 টাকা খরচ হলে মোট কত টাকার প্রয়োজন হবে?



পিরামিড (Pyramid)

প্রাচীন মিশরীয় পিরামিডের কথা কে না জানে। আমরা সবাই শুনেছি। আমরা ব্যক্তিগত ও সমাজ জীবনে প্রতিদিন কত কিছুই ব্যবহার করি। নিচের চিত্রে নিত্য-নৈমিত্তিক ব্যবহার্য কয়েকটি বস্তু দেখানো হয়েছে। তোমরা কি বলতে পার এগুলো কোন কোন কাজে ব্যবহৃত হয়। প্রথম চিত্রে এক টুকরো তরমুজ। তরমুজ খাওয়ার আগে আমরা সাধারণত এভাবে কেটে নিয়ে খাই। দ্বিতীয় চিত্রে একটি তাবু দেখা যাচ্ছে। সাধারণত অস্থায়ী কোনো জায়গায় গিয়ে সাময়িকভাবে অবস্থানের জন্য বাঁশ, কাঠ, মোটা কাপড় ইত্যাদি দ্বারা এক ধরনের ঘর তৈরি সেখানে অবস্থান করা হয়।

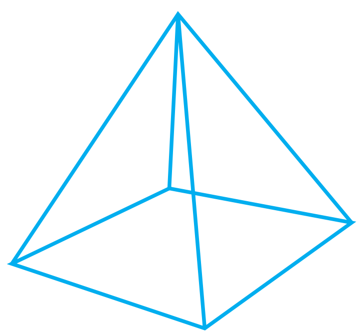
তৃতীয় চিত্রটিতে যা দেখা যাচ্ছে, তা সতর্কতা বোঝাতে ব্যবহার করা হয়। যেমন, কোনো জায়গা ভেজা ও পিচ্ছিল থাকার কারণে সাবধানতা অবলম্বন করতে বলা হয়। আর চতুর্থ চিত্রটিতে সড়ক পথের নির্দিষ্ট জায়গাটি ব্যবহার করতে নিষেধ অর্থে ব্যবহার করা হয়। সে যাই হোক এদের সবগুলোই একেকটি ঘনবস্তু। এ ধরনের আরও কত কিছুই তো আমরা দৈনন্দিন জীবনে ব্যবহার করে থাকি।

তবে উপরের বস্তুগুলোর বিশেষ বৈশিষ্ট্য হলো প্রত্যকটি বস্তুর ভূমি-তল একটি ত্রিভুজাকার, চতুর্ভুজাকার বা অন্য যে কোনো বহুভুজাকার। আর পার্শ্বতলগুলোর প্রত্যেকটি ত্রিভুজাকৃতির। তাছাড়া, এই ত্রিভুজাকৃতির পার্শ্বতলগুলো একটি শীর্ষবিন্দুতে মিলিত হয়। এ ধরনের ঘনবস্তুর নাম কি তোমরা বলতে পারবে? এ ধরনের ঘনবস্তুর নাম **পিরামিড (Pyramid)**।

তোমার কি এ ধরনের আরও কিছু জিনিস বা ঘনবস্তুর নাম লিখে একটি তালিকা তৈরি করতে পারবে? তোমার ধারণাগুলোকে একত্রিত করে উপরের ছবিগুলোর অনুরূপ আরও কয়েকটি বস্তুর নাম লিখে একটি তালিকা তৈরি করো।

ক্রমিক নং	১	২	৩	৪
বস্তুর নাম				

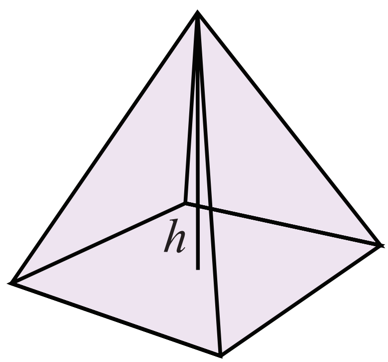
পিরামিড (Pyramid): বহুভুজাকৃতি ভূমির উপর অবস্থিত যে ঘনবস্তুর পার্শ্বতলগুলো ত্রিভুজাকৃতির এবং পার্শ্বতলগুলো একটি শীর্ষবিন্দুতে মিলিত হয়, তাকে পিরামিড বলে। তবে পিরামিডের ভূমি যে কোনো আকৃতির বহুভুজ এবং পার্শ্বতলগুলো যে কোনো আকৃতির ত্রিভুজ হতে পারে।



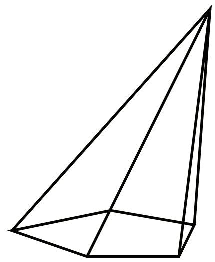
পিরামিডের ভূমি সমবাহুবিশিষ্ট বহুভুজ বা সুষম বহুভুজ এবং পার্শ্বতলগুলো সর্বসম ত্রিভুজ হলে তাকে **সুষম পিরামিড বা নিয়মিত পিরামিড** (regular pyramid) বলে। বস্তুত: সুষম পিরামিড বা নিয়মিত পিরামিড খুবই দৃষ্টিনন্দন।

পিরামিডের ভূমি সুষম বহুভুজ না হলে অথবা পার্শ্বতলগুলো সর্বসম ত্রিভুজ না হলে তাকে **বিষম পিরামিড বা অনিয়মিত পিরামিড** (irregular pyramid) বলে।

একটি পিরামিডের শীর্ষ থেকে ভূমির উপর লম্ব আঁকলে লম্বটির পাদবিন্দু যদি ভূমির অন্তকেন্দ্র হয় তবে তাকে **খাড়া পিরামিড** (right pyramid) বলে। ভূমির অন্তকেন্দ্র বলতে ভূমি বহুভুজের অন্তকেন্দ্র বোঝায়। যে কোনো নিয়মিত পিরামিড বলতে খাড়া পিরামিডকেই বোঝায়।



একটি পিরামিডের শীর্ষ থেকে ভূমির উপর লম্ব আঁকলে লম্বটির পাদবিন্দু যদি ভূমির অন্তকেন্দ্র না হয় তবে তাকে **হেলানো পিরামিড (oblique pyramid)** বলে।



পিরামিডের শীর্ষবিন্দু (Apex of pyramid): পিরামিডের ত্রিভুজাকার পার্শ্বতলগুলো যে সাধারণ বিন্দুতে মিলিত হয় তাকে পিরামিডের শীর্ষবিন্দু বলে।

পিরামিডের ভূমি (Base of pyramid): যে ভূমির উপর পিরামিড অবস্থিত তাকে পিরামিডের ভূমি বলে। পিরামিডের ভূমি যে কোনো আকারের বহুভুজ হতে পারে।

পিরামিডের উচ্চতা (Height of pyramid): পিরামিডের শীর্ষ থেকে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্যকে পিরামিডের উচ্চতা বলে।

পিরামিডের হেলানো উচ্চতা (Lateral height of pyramid): পিরামিডের শীর্ষ থেকে ত্রিভুজের ভূমির উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্যকে পিরামিডের হেলানো উচ্চতা বলে।

পিরামিডের ধার (Edge of pyramid): পিরামিডের শীর্ষবিন্দু ও ভূমির যে কোনো কৌণিক বিন্দুর সংযোজক রেখাংশ পিরামিডের এক একটি ধার। তাছাড়া ভূমির বাহুগুলো পিরামিডের ধার।

যে কোনো পিরামিডের ভূমির বাহুর সংখ্যা ও পার্শ্বতলের সংখ্যা সমান। কিন্তু ধারের সংখ্যা এর ভূমি-বহুভুজের বাহুর সংখ্যা বা পার্শ্বতলের সংখ্যার দ্বিগুণ।

তাহলে পিরামিড বিশ্লেষণ করলে একটি পিরামিডের যেসব উপাদান পাওয়া যায় তা হলো:

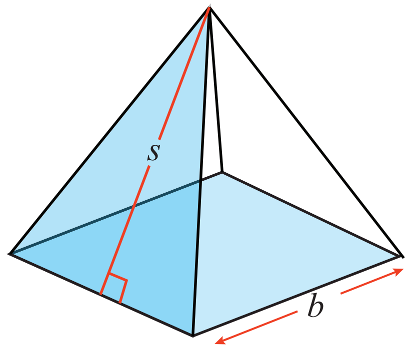
- একটি শীর্ষবিন্দু
- একটি বহুভুজাকার ভূমি
- কমপক্ষে তিনটি বা তার অধিক ত্রিভুজাকার পার্শ্বতল

পিরামিডের ক্ষেত্রফল (Area of pyramid)

আমরা এখন পিরামিডের ক্ষেত্রফল বের করার চেষ্টা করব। পিরামিডের ভূমি ও পার্শ্বতলগুলোর ক্ষেত্রফলই পিরামিডের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল।

ভূমির ক্ষেত্রফল (Area of base)

একটি পিরামিড যে ভূমির উপর অবস্থিত তার ক্ষেত্রফলই পিরামিডেরমির ক্ষেত্রফল। পিরামিডের ভূমি ত্রিভুজাকার, চতুর্ভুজাকার, পঞ্চভুজাকার বা যে কোনো বহুভুজাকার হলে প্রথমে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে হবে।



পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল (Lateral surface area)

পিরামিডের পার্শ্বতলগুলো ত্রিভুজাকার। মনে করি, চতুর্ভুজাকার এই পিরামিডের ভূমির বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a, b, c, d একক এবং হেলানো উচ্চতা s একক। খেয়াল রাখতে হবে, প্রত্যেকটি ত্রিভুজের উচ্চতাই হেলানো উচ্চতা।

$\therefore$ পিরামিডের পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} a \times s + \frac{1}{2} b \times s + \frac{1}{2} c \times s + \frac{1}{2} d \times s$

$= \frac{1}{2}(a + b + c + d) \times s$

$= \frac{1}{2}$ (ভূমির পরিসীমা $\times$ হেলানো উচ্চতা) বর্গ একক

পিরামিডের পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফলের এই সূত্রটি সকল পিরামিডের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য।

$\therefore$ পিরামিডের পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ (ভূমির পরিসীমা $\times$ হেলানো উচ্চতা) বর্গ একক

$\therefore$ পিরামিডের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = ভূমির ক্ষেত্রফল + পার্শ্বতলগুলোর ক্ষেত্রফল

$\therefore$ পিরামিডের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = ভূমির ক্ষেত্রফল + $\frac{1}{2}$ (ভূমির পরিসীমা $\times$ হেলানো উচ্চতা) বর্গ একক

$\therefore$ পিরামিডের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = ভূমির ক্ষেত্রফল + $\frac{1}{2}$ (ভূমির পরিসীমা $\times$ হেলানো উচ্চতা) বর্গ একক)

সমস্যা ১: একটি ত্রিভুজাকৃতি পিরামিডের ভূমির বাহু তিনটির দৈর্ঘ্য 3 সেমি, 4 সেমি ও 5 সেমি এবং উচ্চতা 13 সেমি। পিরামিডটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

সমস্যা ২: একটি সুষম ষড়ভুজাকৃতি পিরামিড সদৃশ মিনারের ভূমির প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 4.8 মি. এবং মিনারটির উচ্চতা 15 মি.। মিনারটির পার্শ্বতলগুলোর ক্ষেত্রফল ও সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

পিরামিডের আয়তন (Volume of pyramid)

পিরামিডের ভূমির ক্ষেত্রফলকে উচ্চতা দ্বারা গুণ করে প্রাপ্ত ফলাফলকে 3 দ্বারা ভাগ করলে আয়তন পাওয়া যায়।

$\therefore$ পিরামিডের আয়তন $= \dfrac{1}{3}$ (ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা) ঘন একক।

$\therefore$ পিরামিডের আয়তন $= \dfrac{1}{3}$ (ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা) ঘন একক।

সমস্যা ৩: একটি ত্রিভুজাকার পিরামিড সদৃশ স্থাপনার ভূমির বাহু তিনটির দৈর্ঘ্য 28 সেমি, 45 সেমি ও 53 সেমি এবং উচ্চতা 62 সেমি। স্থাপনাটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় করো।

সমস্যা ৪: একটি সুষম অষ্টভুজাকার পিরামিড আকৃতির স্তম্ভের ভূমির প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য 23 সেমি. এবং স্তম্ভটির উচ্চতা 3.7 মি.। স্তম্ভটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় করো।

অনুশীলনী

১. 12 সেমি লম্বা কোণকাকৃতি একটি গাজরের বোঁটার দিকে ভূমির ব্যাস 2.5 সেমি। গাজরটির আয়তন কত?

২. চিত্রে সড়কে ব্যবহৃত প্লাস্টিকের তৈরি নিরেট ঘনবস্তুটির ভূমির ক্ষেত্রফল 1256.64 বর্গসেমি এবং হেলানো তলের দৈর্ঘ্য 26 সেমি।

(i) ঘনবস্তুটির বক্রতল রং করতে প্রতি বর্গ সেন্টিমিটারে 1.50 টাকা খরচ হলে মোট কত টাকা খরচ হবে?

(ii) ঘনবস্তুটিতে কতটুকু প্লাস্টিক আছে?

৩. একটি প্লাস্টিকের নিরেট গোলকের ব্যাসার্ধ 6 সেমি। গোলকটিকে গলিয়ে 7 সেমি ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি ফাঁপা গোলকে পরিণত করা হলে, ফাঁপা গোলকের প্লাস্টিকের পুরুত্ব নির্ণয় করো।

৪. চারটি নিরেট গোলকের ব্যাসার্ধ 3 সেমি, 8 সেমি, 13 সেমি ও r সেমি। গোলক চারটিকে গলিয়ে 14 সেমি ব্যাসার্ধবিশিষ্ট নতুন আরেকটি নিরেট গোলক তৈরি করা হলে r এর মান কত?

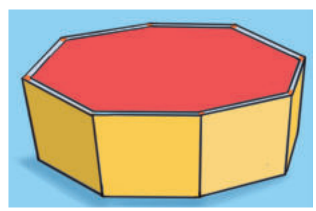
৫. একটি সুষম সপ্তভুজাকার প্রিজম আকৃতির অ্যাকুরিয়ামের ভূমির প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য 25 সেমি এবং উচ্চতা 1 মি। প্রতি বর্গসেমি 2টাকা হিসাবে অ্যাকুরিয়ামটির পার্শ্বতল কাচ দ্বারা আবৃত করতে মোট কত টাকা খরচ হবে? অ্যাকুরিয়ামটির তিন-চতুর্থাংশ পানিপূর্ণ করতে কত লিটার পানি লাগবে? [1000 ঘনসেমি = 1 লিটার।]

৬. চিত্রের সুষম প্রিজমের ভূমির প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য 5 সেমি এবং পার্শ্বতলগুলো বর্গাকার।

(i) প্রিজমটির ভূমিদ্বয়ের ক্ষেত্রফল পরিমাপ করো।

(ii) প্রিজমটির বক্রতলের ক্ষেত্রফল কত?

(iii) প্রিজমটির আয়তন নির্ণয় করো।



৭. $8\sqrt{2}$ মিটার দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট বর্গাকৃতি ভূমির উপর ঠিক মাঝখানে $\sqrt{66}$ মিটার উঁচু একটি খুঁটি স্থাপন ক'রে তাবুটি নির্মাণ করা হয়েছে।

(ii) তাবুটির ধারের দৈর্ঘ্য নির্নয় করো।

(ii) প্রতি বর্গমিটার 200 টাকা হিসাবে কত টাকার কাপড় কিনতে হয়েছে?

(iii) তাবুটির মধ্যে কতটুকু বায়ুপূর্ণ ফাঁকা জায়গা পাওয়া গেছে তা নির্ণয় করো।

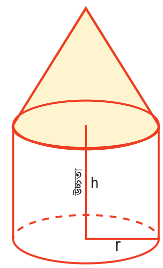
৮. $\sqrt{67}$ মিটার ধারবিশিষ্ট একটি পিরামিড 6 মিটার বাহুবিশিষ্ট বর্গাকৃতি ভূমির উপর অবস্থিত।

(i) পিরামিডটির উচ্চতা নির্ণয় করো।

(ii) পিরামিডটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল কত?

(iii) পিরামিডটির আয়তন নির্ণয় করো।

৯. চিত্রের যৌগিক ঘনবস্তুটির নিম্নাংশের ভূমির ব্যাস 4 মিটার এবং উচ্চতা 5 মিটার। উপরের অংশের হেলানো উচ্চতা 3 মিটার।

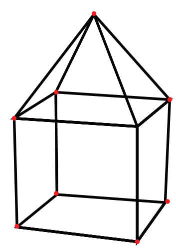


(i) ঘনবস্তুটির নিম্নাংশের বক্রতল রং করতে প্রতি বর্গমিটারে 450 টাকা খরচ হলে মোট কত টাকা লাগবে?

(ii) ঘনবস্তুটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল কত?

(iii) ঘনবস্তুটির আয়তন নির্ণয় করো।

১০. চিত্রের যৌগিক ঘনবস্তুটি যে আয়তাকার ভূমির উপর অবস্থিত তার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে 6 মিটার ও 4 মিটার এবং নিচের অংশের উচ্চতা 7 মিটার। উপরের অংশের ধারের দৈর্ঘ্য 7.5 মিটার।

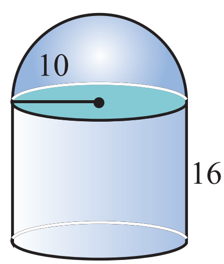


(i) ঘনবস্তুটির নিম্নাংশের চতুর্দিকে লোহার পাত লাগাতে প্রতি বর্গমিটারে 2250 টাকা খরচ হলে মোট কত টাকা লাগবে?

(ii) ঘনবস্তুটির উপরের অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

(iii) ঘনবস্তুটির আয়তন নির্ণয় করো।

১১. চিত্রের যৌগিক ঘনবস্তুটির ভূমির ব্যাসার্ধ 10 সেন্টিমিটার এবং নিম্নাংশের উচ্চতা 16 সেন্টিমিটার।



(i) ঘনবস্তুটির উপরের অংশ অর্ধগোলাকার হলে ঘনবস্তুটির উচ্চতা কত?

(ii) ঘনবস্তুটির উপরের অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

(iii) ঘনবস্তুটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল কত?

(iv) ঘনবস্তুটির আয়তন নির্ণয় করো।

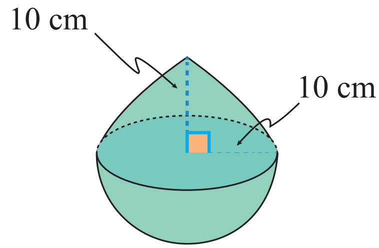
১২. চিত্রের যৌগিক ঘনবস্তুটি ভালো করে লক্ষ করো।

(i) ঘনবস্তুটির হেলানো তলের দৈর্ঘ্য কত?

(ii) ঘনবস্তুটির উপরের অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

(iii) ঘনবস্তুটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল কত?

(iv) ঘনবস্তুটির আয়তন নির্ণয় করো।



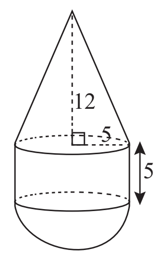
১৩. চিত্রের যৌগিক ঘনবস্তুটি ভালো করে লক্ষ করো।

(i) ঘনবস্তুটির উপরের অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

(ii) ঘনবস্তুটির উচ্চতা কত?

(iii) ঘনবস্তুটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

(iv) ঘনবস্তুটির আয়তন নির্ণয় করো।



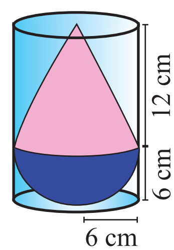
১৪. চিত্রে একটি অর্ধগোলক ও কোণক একটি সিলিন্ডারের মধ্যে ঠিক বসে গেছে।

(i) কোণকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

(ii) অর্ধগোলকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল বের করো।

(iii) সিলিন্ডারের ফাঁকা অংশের আয়তন নির্ণয় করো।

(iv) অর্ধগোলক, কোণক ও সিলিন্ডারের আয়তনের অনুপাত কত?



বিস্তার পরিমাপ

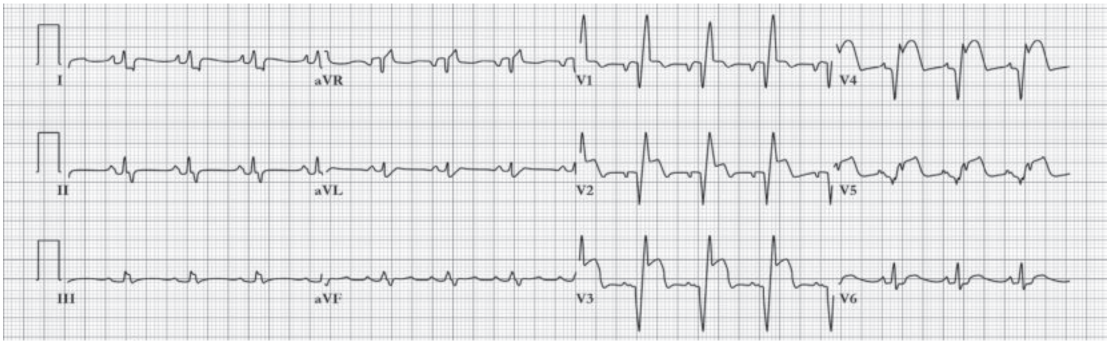
এই অভিজ্ঞতায় শিখতে পারবে-

- পূর্ব অভিজ্ঞতা ও তার প্রতিফলন
- বস্তুনিষ্ঠ সিদ্ধান্ত গ্রহণে বিস্তার পরিমাপের প্রয়োজনীয়তা
- বিস্তার পরিমাপের প্রকারভেদ
- বিভিন্ন প্রকার বিস্তার পরিমাপ নির্ণয়

শিক্ষাবর্ষ ২০২৪

বিস্তার পরিমাপ

তোমরা ইতোমধ্যেই জেনেছ যে, পরিসংখ্যান নির্দিষ্ট লক্ষ্যে সংগৃহীত উপাত্ত নিয়ে কাজ করে। সংগৃহীত উপাত্ত বিশ্লেষণ ও ব্যাখ্যা করে আমরা কোনো বিষয়ে সিদ্ধান্ত গ্রহণ করে থাকি। পূর্বের শ্রেণিতে তোমরা উপাত্তের লেখচিত্রে উপস্থাপন সম্পর্কে জেনেছ। এই ধরনের উপস্থাপনা উপাত্তের কিছু গুরুত্বপূর্ণ বৈশিষ্ট্য প্রকাশ করে। নিচের ছবিটি লক্ষ করো:



আমাদের হৃদস্পন্দনের হার ও তার ছন্দ পরীক্ষা করার জন্য চিকিৎসকরা ইলেক্ট্রোকার্ডিওগ্রাম বা ইসিজি করে থাকেন, যার গ্রাফ দেখতে অনেকটা এই রকম। আর এই গ্রাফ দেখে চিকিৎসকরা হার্ট অ্যাটাক, হৃদরোগ, অস্বাভাবিক হৃদস্পন্দন ইত্যাদি শনাক্ত করে ব্যবস্থাপত্র দিয়ে থাকেন। তাছাড়া, সংগৃহীত উপাত্তের প্রতিনিধিত্বকারী মান খুঁজে বের করার জন্য তোমরা কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ সম্পর্কে পূর্বের শ্রেণিগুলোতে ধারাবাহিকভাবে জেনে এসেছ। তবে কোনো বিষয়ে সিদ্ধান্ত গ্রহণের ক্ষেত্রে কেন্দ্রীয় মান আমাদের মোটামুটি একটি ধারণা দেয়। কিন্তু অপেক্ষাকৃত নির্ভুল সিদ্ধান্তের জন্য উপাত্তগুলোকে সূক্ষ্মভাবে বিশ্লেষণ ও ব্যাখ্যা করা প্রয়োজন হয়। সেক্ষেত্রে উপাত্তগুলো কেন্দ্রীয় মানের চারপাশে কীভাবে ছড়িয়ে-ছিটিয়ে আছে, সে সম্পর্কেও আমাদের জানতে হবে।

একটি উদাহরণের মাধ্যমে বিষয়টি আলোচনা করা যাক–

তুমিতো জানো, তোমার জেলার স্কুলগুলো নিয়ে প্রতি বছর জেলাভিত্তিক “T - 20 স্কুল ক্রিকেট” প্রতিযোগিতার আয়োজন করা হয়। বরাবরের মতো এবারও তোমাদের স্কুলের ক্রিকেট দল ওই প্রতিযোগিতায় অংশগ্রহণ করে।

ধরো, প্রতিযোগিতায় দশটি ম্যাচে তোমাদের স্কুলের দু’জন ব্যাটসম্যান A ও B করা রান এবং ফাইনাল ম্যাচের নিবেশন সারণি নিম্নরূপ:

ব্যাটসম্যান A: 30, 91, 0, 64, 42, 80, 30, 5, 117, 71

ব্যাটসম্যান B: 53, 46, 48, 50, 53, 53, 58, 60, 57, 52

পরামর্শ

তোমার ক্লাসের শিক্ষার্থীদের নিয়ে দুইটি দল গঠন করে কয়েকটি ক্রিকেট ম্যাচ আয়োজন করো। তারপর যে কোনো দুই বা তিন জন ব্যাটসম্যান বা বোলারের স্কোর সংগ্রহ করো।

ফাইনাল ম্যাচের নিবেশন সারণি

ওভার	1 – 4	5 – 8	9 – 12	13 – 16	17 – 20
রান	24	32	36	38	30

ব্যাটসম্যান A এর গড় রান নির্ণয় করি:

$\overline{x}=$

$=$

$= \boxed{53}$

ব্যাটসম্যান B এর গড় রান নির্ণয় করি:

$\overline{x}=$

$=$

$= \boxed{}$

ব্যাটসম্যান A এর রানের মধ্যক নির্ণয় করি:
উপাত্তগুলোকে মানের উর্ধ্বক্রম অনুসারে সাজিয়ে পাই,

$=$

$=$

$= \boxed{}$

ব্যাটসম্যান B এর রানের মধ্যক নির্ণয় করি:
উপাত্তগুলোকে মানের উর্ধ্বক্রম অনুসারে সাজিয়ে পাই,

$=$

$=$

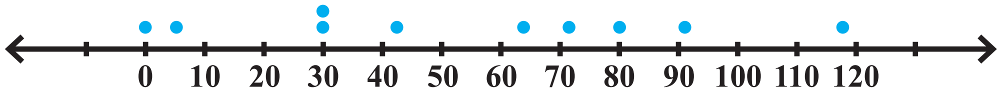
$= \boxed{53}$

উভয় ব্যাটসম্যানের করা রানের গড় ও মধ্যক নির্ণয় করে কী মান পেলে? দু'জনেরই রানের গড় এবং মধ্যক একই। তোমাদের কী মনে হয়, এই দু'জন খেলোয়াড়ের পারদর্শিতা একই? একেবারেই না। কারণ সমান সংখ্যক ম্যাচ খেলে ব্যাটসম্যান A এর রানের পরিসর (0-117) এবং ব্যাটসম্যান B এর রানের পরিসর (46-60)। ভেবে দেখো তো দু'জন ব্যাটসম্যানের পারদর্শিতার ধারাবাহিকতার মধ্যে কোনো পার্থক্য আছে কি না? যদি থাকে তবে সংক্ষেপে নিচের খালি বক্সে যুক্তিসহ তোমার মতামত লেখো:

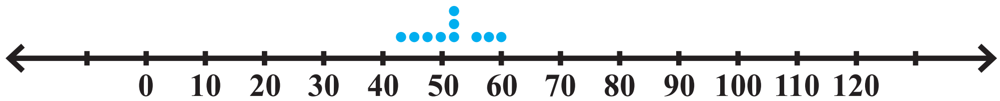
মাথা খাটাও

তোমার ভাবনাটির সঠিকতা যাচাইয়ের জন্য চলো উভয় ব্যাটসম্যানের স্কোরগুলো সংখ্যারেখায় বিন্দুর মাধ্যমে বসিয়ে দেখি:

ব্যাটসম্যান A এর স্কোরগুলোর সংখ্যারেখায় উপস্থাপন



ব্যাটসম্যান B এর স্কোরগুলোর সংখ্যারেখায় উপস্থাপন



উপরের চিত্র দুটি পর্যবেক্ষণ করে আমরা দেখতে পাই, ব্যাটসম্যান B এর স্কোরের বিন্দুগুলো কেন্দ্রীয় মানের (গড় ও মধ্যক) খুব কাছাকাছি অবস্থান করছে। অন্য দিকে ব্যাটসম্যান A এর স্কোরের বিন্দুগুলো কেন্দ্রীয় মান (গড় ও মধ্যক) থেকে অনেক দূরে দূরে ছড়িয়ে ছিটিয়ে আছে, যদিও তাদের রানের গড় ও মধ্যক একই।

সুতরাং আমরা বলতে পারি, কোনো একটি বিষয়ে বস্তুনিষ্ঠ সিদ্ধান্ত গ্রহণের ক্ষেত্রে সংগৃহীত উপাত্তের কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপই যথেষ্ট নয়। কেন্দ্রীয় মানের সাপেক্ষে উপাত্তগুলো বিস্তারও পরিমাপ করা প্রয়োজন। কেননা এটি কেন্দ্রীয় মানের যথার্থতা যাচাই করে। যে তথ্যসারির বিস্তার যত কম তার কেন্দ্রীয় মানগুলো ততো বেশি প্রতিনিধিত্বকারী। বিস্তার তথ্যসারির মানগুলোর সামঞ্জস্যতা পরিমাপ করে। যে তথ্যসারির বিস্তার যত বেশি তার মানগুলো ততো বেশি অসামঞ্জস্যপূর্ণ।

তাই, এই অভিজ্ঞতায় **বিস্তার পরিমাপ** (Measures of Dispersion) এর গুরুত্ব ও নির্ণয়ের পদ্ধতি সম্পর্কে জানবো।

উপরের আলোচনা থেকে তোমরা নিশ্চয়ই বুঝতে পারলে, কেন্দ্রীয় মান থেকে উপাত্তের অন্যান্য মানগুলোর ব্যবধানই হলো বিস্তার। এর সাহায্যে উপাত্তের কেন্দ্রীয় মান হতে অন্যান্য মানগুলো কত দূরে অবস্থান করছে সে সম্পর্কে ধারণা পাওয়া যায়। পরিসংখ্যানবিদ A.L.Bowley এর মতে “Dispersion is the measures of the variation of the items” অর্থাৎ বিস্তার হলো তথ্যসারির উপাদানগুলোর ভিন্নতার পরিমাপ।

সুতরাং যে গাণিতিক পরিমাপের সাহায্যে কোনো নিবেশনের কেন্দ্রীয় মান হতে অন্যান্য মানগুলোর ব্যবধান নির্ণয় করা হয় তাকে আমরা বিস্তার পরিমাপ বলতে পারি।

পরিসংখ্যানবিদ A. L. Bowley

তোমরা ইতোমধ্যেই জেনেছ, দুই বা ততোধিক তথ্যসারির মধ্যে তুলনা করাই হলো বিস্তার পরিমাপ নির্ণয়ের মূল উদ্দেশ্য। তথ্যসারিগুলোর প্রকৃতির উপর ভিত্তি করে বিভিন্ন প্রকার বিস্তার পরিমাপ ব্যবহার করা হয়। তবে

এই শ্রেণিতে আমরা বিভিন্ন প্রকার বিস্তার পরিমাপগুলো থেকে পরিসর, গড় ব্যবধান, ভেদাঙ্ক ও পরিমিত ব্যবধান সম্পর্কে সংক্ষিপ্ত পরিসরে জানার চেষ্টা করব।

পরিসর (Range)

পরিসর হলো কোনো তথ্যরাশির বা নিবেশনের বৃহত্তম মান ও ক্ষুদ্রতম মানের ব্যবধান বা পার্থক্য। তবে শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তের ক্ষেত্রে সর্বশেষ শ্রেণির উচ্চসীমা ও প্রথম শ্রেণির নিম্নসীমার ব্যবধান হবে পরিসর। পরিসরকে সাধারণত R দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

একক কাজ:

তোমার পরিবারের সদস্যদের উচ্চতা সেমি বা ইঞ্চিতে পরিমাপ করে প্রাপ্ত উপাত্তের পরিসর নির্ণয় করো।

মাথা খাটাও

পরিসর সর্বদাই ধনাত্মক, কেন?

____

____

অবিন্যস্ত বা অশ্রেণিকৃত উপাত্তের ক্ষেত্রে:

কোনো চলক x এর n সংখ্যক মান যথাক্রমে $x_1, x_2, x_3, \dots\dots\dots, x_n$। যাদের মধ্যে ক্ষুদ্রতম মান ধরি, x_L এবং বৃহত্তম মান x_H. সুতরাং পরিসর $R = x_H - x_L$ বা $R = |x_H - x_L|$

বিন্যস্ত বা শ্রেণিকৃত উপাত্তের ক্ষেত্রে:

ধরি, সর্বশেষ শ্রেণির উচ্চসীমা L_u এবং সর্বনিম্ন শ্রেণির নিম্নসীমা L_l

সুতরাং পরিসর $R = L_u - L_l$

নির্দেশনা

কোনো নিবেশনের প্রথম শ্রেণির গণসংখ্যা 0 (শূন্য) হলে, পরিসর নির্ণয়ে প্রথম শ্রেণির পরবর্তী শ্রেণিকে প্রথম শ্রেণি হিসেবে ধরতে হবে। তারপর পরিসর নির্ণয় করতে হবে।

একক কাজ: ১

ক) $-12, -7, -2, 0, 7, 8$ তথ্যসারির পরিসর নির্ণয় করো।

খ) ধরো, গড় মাসে তোমার ক্লাসের 62 জন শিক্ষার্থীর উপস্থিতির শ্রেণি বিন্যস্ত তালিকাটি নিম্নরূপ ছিল।

উপস্থিতির দিনসংখ্যা	1 – 3	4 – 6	7 – 9	10 – 12	13 – 15	16 – 18
শিক্ষার্থীর সংখ্যা	2	3	7	12	30	8

প্রত্যেকেই নিজ নিজ খাতায় হিসাব করো এবং ফলাফল নিচের বক্সে লেখো:

- ক) হিসাব করে পাই পরিসর, R =
- খ) হিসাব করে পাই পরিসর, R =

একক কাজ ২

তোমার বাগানের সবচেয়ে বড়ো ফুলগাছটির উচ্চতা 75.06 সেমি এবং গাছগুলোর উচ্চতার পরিসর 15.37 সেমি। সবচেয়ে ছোটো ফুলগাছটির উচ্চতা নির্ণয় করো।

সিদ্ধান্ত গ্রহণে পরিসর

পরিসর নির্ণয়ের মাধ্যমে বিস্তার পরিমাপ করা খুবই সহজ একটি পদ্ধতি। খুব অল্প সময়ের মধ্যেই এটির মান নির্ণয় করা যায়। পরিসর নির্ণয়ে উপাত্তগুলোর কেবল সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন রাশি দুটির মানই ব্যবহৃত হয় এবং অন্য সব রাশির মানগুলোকে উপেক্ষা করা হয়। শুধু তাই নয়, শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তে প্রান্তীয় শ্রেণির নিম্নসীমা ও উচ্চসীমা যদি মুক্ত থাকে তবে পরিসর পরিমাপ করা যায় না। তবে এটি তাৎক্ষণিকভাবে কোনো তথ্যসারির বিস্তার সম্পর্কে একটা সর্বোপরি ধারণা দেয়। বাস্তব ক্ষেত্রে বিস্তার পরিমাপ হিসেবে পরিসরের চেয়ে গড় ব্যবধানের ব্যবহার অনেক বেশি।

প্রথম 15টি মৌলিক সংখ্যার পরিসর

দৈনন্দিন জীবনে পরিসরের ব্যবহার

আমরা জেনেছি, পরিসর প্রতিনিধিত্বশীল বিস্তার পরিমাপক নয়। তাই এটি ব্যবহারিক জীবনে ঢালাওভাবে খুব একটা ব্যবহৃত হতে দেখা যায় না। তবে বিশেষ কয়েকটি ক্ষেত্রে পরিসরের ব্যবহার অনস্বীকার্য। যেমন:

(i) তোমরা প্রতিদিন রেডিও বা টেলিভিশনে আবহাওয়ার পূর্বাভাস জেনে থাকো। লক্ষ করলে দেখবে বা শুনবে আবহাওয়াবিদগণ দৈনিক তাপমাত্রার বিবরণ দেয়ার সময় গড় তাপমাত্রার কথা না বলে সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন তাপমাত্রার কথা বলে থাকেন। অর্থাৎ তাঁরা উপাত্তের পরিসর ব্যবহার করে থাকেন।

(ii) তোমরা অনেকেই শেয়ার বাজারের কথা শুনে থাকবে। শেয়ার বাজারে প্রতিনিয়ত শেয়ারের দাম কমে অথবা বাড়ে। তাই শেয়ার ক্রেতা ও বিক্রেতা উভয়কেই শেয়ারের সর্বনিম্ন ও সর্বোচ্চ মূল্যের পরিসর জানতে হয়। শেয়ার মূল্যের পরিসর জানা থাকলে দর কষাকষিতে শেয়ার ক্রেতা ও বিক্রেতার ক্ষতির সম্ভাবনা কম থাকে।

দলগত কাজ:

(i) দলে বিভক্ত হয়ে তোমাদের ক্লাসের সকল শিক্ষার্থীর উচ্চতা (ইঞ্চিতে) পরিমাপ করো। প্রাপ্ত উপাত্তের পরিসর নির্ণয় করো।

(ii) সুবিধামতো শ্রেণি ব্যবধান নিয়ে উপাত্তগুলোকে শ্রেণি বিন্যস্ত করো। এবার শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তের পরিসর নির্ণয় করো।

গড় ব্যবধান (Mean Deviation)

গড় ব্যবধান এমন এক প্রকার বিস্তার পরিমাপক যা তথ্যসারির প্রতিটি মানের গড় হতে ব্যবধান পরিমাপ করে। অর্থাৎ তথ্যসারির কেন্দ্রীয় মান থেকে তথ্যগুলো গড়ে কত দূরে, তা পরিমাপ করা। আমরা জানি, "তথ্যসারির প্রতিটি মান হতে এদের গাণিতিক গড়ের বিচ্যুতির সমষ্টি শূন্য।" তাই ব্যবধান পরিমাপের সময় যদি ধনাত্মক ও ঋণাত্মক চিহ্ন বিবেচনা করা হয় তবে গড় ব্যবধান পরিমাপ করা পুরোপুরি অর্থহীন। সেজন্য প্রতিটি মান হতে ব্যবধান পরিমাপের সময় চিহ্ন বিবেচনায় না এনে ব্যবধানের পরম মান নেয়া হয়। কোনো নিবেশনের গড়, মধ্যমা ও প্রচুরক থেকে সংখ্যাগুলোর ব্যবধানের পরম মানের সমষ্টিকে মোট গণসংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে যে মান পাওয়া যাবে, তাকেই আমরা গড় ব্যবধান বলে থাকি।

চলো হিসাব করে দেখি,"তথ্যসারির মানগুলোর গাণিতিক গড় হতে বিচ্যুতির সমষ্টি শূন্য।" হয় কি না।

মনে করো, তোমার পরিবারে 5 জন সদস্য। যাদের বয়স (বছরে) 5, 12, 36, 40 ও 67। পরিবারের সদস্যদের বয়সের গড় $\overline{x}=32$

$\therefore$ গড় হতে বিচ্যুতির সমষ্টি $\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})=(5-32)+(12-32)+(36-32)+(40-32)+(67-32)$

$=-27-20+4+8+35=47-47=0$

সুতরাং আমরা বলতে পারি, "তথ্যসারির প্রতিটি মান হতে এদের গাণিতিক গড়ের বিচ্যুতির সমষ্টি শূন্য।"

মাথা খাটাও

- দেখাও যে, মধ্যক থেকে নির্ণীত গড় ব্যবধানই ক্ষুদ্রতম।
- প্রমাণ করো যে, দুইটি অসমান উপাত্তের গড় ব্যবধান তাদের পরিসরের অর্ধেক।

একক কাজ:

ব্যাটসম্যান A ও B এর করা রান ও এদের গাণিতিক গড়ের বিচ্যুতির সমষ্টি নির্ণয় করো।

অবিন্যস্ত বা অশ্রেণিকৃত উপাত্তের গড় ব্যবধান নির্ণয়:

মনে করো, তোমার ক্লাসে গত আট দিনের শিক্ষার্থীদের অনুপস্থিত সংখ্যা: 3, 6, 6, 7, 8, 11, 15, 16

তথ্যসারির গড় ব্যবধান বের করার জন্য আমাদের তিনটি কাজ করতে হবে।

গড় ব্যবধান নির্ণয়ে কী কী করণীয়:

- প্রথমেই তথ্যসারির গড় নির্ণয় করা
- নির্ণেয় গড় থেকে প্রতিটি উপাত্তের পার্থক্য বের করা
- পার্থক্যগুলোর গড় নির্ণয় করা

ধাপ – ১: প্রথমেই অনুপস্থিত সংখ্যাগুলোর গড় নির্ণয় করি:

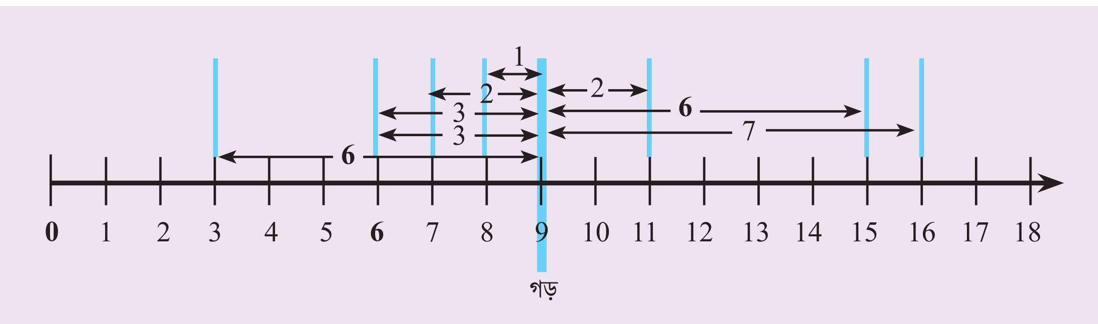
$$\text{সংখ্যাগুলোর গড়} = \frac{3+6+6+7+8+11+15+16}{8}$$

$$= \frac{72}{8} = 9$$

ধাপ – ২: সংখ্যাগুলোর গড় 9 থেকে উপাত্তগুলোর প্রতিটি মানের পার্থক্য বের করি:

অনুপস্থিত সংখ্যা	3	6	6	7	8	11	15	16
গড় ৯ থেকে প্রতিটি মানের পার্থক্য	6	3	3	2	1	2	6	7

চলো, গড় থেকে প্রতিটি মানের পার্থক্যকে চিত্রের মাধ্যমে দেখি ও বুঝতে চেষ্টা করি:



ধাপ – ৩: এখন গড় 9 থেকে প্রতিটি মানের পার্থক্য বা ব্যবধানগুলোর গড় নির্ণয় করি:

$$\text{গড় ব্যবধান} = \frac{6+3+3+2+1+2+6+7}{8}$$

$$= \frac{30}{8} = 3.75$$

মাথা খাটাও

গড় ব্যবধানের ক্ষেত্রে সংখ্যা রেখায় গড়ের বামের ও ডানের ব্যবধানের সমষ্টি সমান হবে। চিত্রটিতে গড় 9। উক্তিটির সঠিকতা যাচাই করে দেখো।

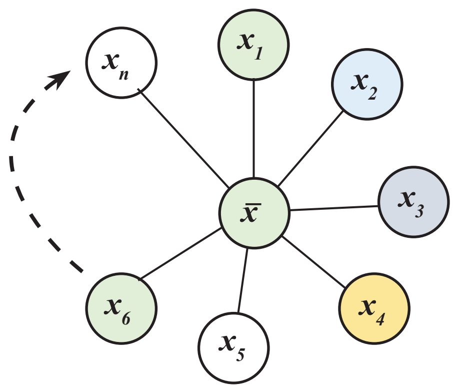
সুতরাং, তোমার ক্লাসে গত আট দিনের শিক্ষার্থীদের অনুপস্থিত সংখ্যাগুলোর গড় 9 এবং গড় ব্যবধান 3.75।

গড় ব্যবধান নির্ণয় করে তোমরা বুঝতে পারলে গড় থেকে অন্যান্য মানগুলো কত দূরে অবস্থিত।

সূত্রের মাধ্যমে অবিন্যস্ত বা অশ্রেণিকৃত উপাত্তের গড় ব্যবধান নির্ণয়:

মনে করো, কোনো একটি চলক x এর n সংখ্যক মান যথাক্রমে $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots, x_n$

সুতরাং তথ্যসারির গড় ব্যবধান নির্ণয়ের জন্য আমরা নিচের ধাপগুলো অনুসরণ করতে পারি:



ধাপ – ১: উপাত্তসমূহের গাণিতিক গড় $\bar{x}$ নির্ণয় করা।

ধাপ – ২: উপাত্তের প্রতিটি মান থেকে $\bar{x}$ এর ব্যবধান বের করা।

ধাপ – ৩: উপাত্তের প্রতিটি মান থেকে $\bar{x}$ এর ব্যবধানের পরম মান নির্ণয় করা।

যেমন: $|x_1 - \bar{x}|, |x_2 - \bar{x}|, |x_3 - \bar{x}|, \ldots\ldots |x_n - \bar{x}|$.

ধাপ – ৪: n সংখ্যক ব্যবধানের গড় নির্ণয় করা।

অর্থাৎ গড় $= \dfrac{\sum_{i=1}^{n}|x_i - \bar{x}|}{n}$

এই চারটি ধাপ অনুসরণ করে আমরা যে n সংখ্যক ব্যবধানের গড় নির্ণয় করলাম, এটিই হলো অবিন্যস্ত বা অশ্রেণিকৃত উপাত্তের "গাণিতিক গড় হতে নির্ণীত গড় ব্যবধান" নির্ণয়ের সূত্র।

সুতরাং, গাণিতিক গড় হতে নির্ণীত গড় ব্যবধান,

$$\text{M. D}(\bar{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i - \bar{x}|}{n}$$

একইভাবে অশ্রেণিকৃত উপাত্তের ব্যবধান, মধ্যক (M_e) হতে নির্ণীত হলে এটিকে "মধ্যক হতে নির্ণীত গড় ব্যবধান" এবং প্রচুরক (M_o) হতে নির্ণীত হলে এটিকে "প্রচুরক হতে নির্ণীত গড় ব্যবধান" বলে অভিহিত করা হয়।

$\therefore$ মধ্যক হতে নির্ণীত গড় ব্যবধান, $\text{M.D}(\text{M}_e) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}|x_i - \text{M}_e|}{n}$

$\therefore$ প্রচুরক হতে নির্ণীত গড় ব্যবধান, $\text{M.D}(\text{M}_o) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}|x_i - \text{M}_o|}{n}$

উদাহরণ - ১: চলো সূত্র ব্যবহার করে ব্যাটসম্যান A এর করা রানের গাণিতিক গড় হতে গড় ব্যবধান নির্ণয় করি:

ধাপ – ১: ব্যাটসম্যান A এর করা রানের গাণিতিক গড়, $\bar{x} = 53$ [তোমরা ইতোমধ্যেই নির্ণয় করেছ]

ধাপ – ২: গাণিতিক গড়, $\bar{x} = 53$ থেকে উপাত্তগুলোর প্রতিটি মানের পার্থক্য ($|x_i - \bar{x}|$) নির্ণয় করি:

রান (x_i)	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$
30	23
91	38
0	53
64	11
42	11
80	27
30	23
5	48
117	64
71	18
$\sum\lvert x_i - \bar{x}\rvert = 316$	

ধাপ – ৩:

$\therefore$ গড় ব্যবধান $M.D(\bar{x})$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i - \bar{x}|}{n} = \frac{316}{10}$$

$= 31.6$

অর্থাৎ গাণিতিক গড় থেকে ব্যাটসম্যান A এর করা রানগুলোর ব্যবধান 31.6 এক্ষেত্রে ব্যবধান অনেক বেশি বলে আমরা বলতে পারি, ব্যাটসম্যান A এর পারদর্শিতার ধারাবাহিকতা কম।

একক কাজ:

ক) ব্যাটসম্যান A এর করা রানের মধ্যক ও প্রচুরক হতে গড় ব্যবধান নির্ণয় করো।

খ) ব্যাটসম্যান B এর করা রানের গাণিতিক গড়, মধ্যক ও প্রচুরক হতে গড় ব্যবধান নির্ণয় করো।

গ) ব্যাটসম্যান A ও B থেকে প্রাপ্ত তথ্যরাশির গড় ব্যবধান পর্যালোচনা করে তাদের পারদর্শিতা সম্পর্কে তোমার মতামত উপস্থাপন করো।

শ্রেণিবিন্যস্ত উপাত্তের গড় ব্যবধান নির্ণয়

মনে করো, কোনো গণসংখ্যা নিবেশনের n সংখ্যক শ্রেণির মধ্যবিন্দু $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots, x_n$ এবং এদের গণসংখ্যা যথাক্রমে $f_1, f_2, f_3, \ldots\ldots\ldots, f_n$।

প্রথমে শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তের গাণিতিক গড় ($\bar{x}$), মধ্যক (M_e) ও প্রচুরক (M_o) নির্ণয় করতে হবে। অতঃপর নিচের সূত্র ব্যবহার করে উপাত্তসমূহের গড় ব্যবধান নির্ণয় করা যাবে।

শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তের গড় ব্যবধান নির্ণয়ের সূত্র:

(i) গাণিতিক গড় হতে নির্ণীত গড় ব্যবধান

$$= \frac{\sum f_i |x_i - \bar{x}|}{n}$$

(ii) মধ্যক হতে নির্ণীত গড় ব্যবধান

$$= \frac{\sum f_i |x_i - M_e|}{n}$$

(iii) প্রচুরক হতে নির্ণীত গড় ব্যবধান

$$= \frac{\sum f_i |x_i - M_o|}{n}$$

আমি পূর্বের শ্রেণিতে শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তের গাণিতিক গড় ($\bar{x}$), মধ্যক (M_e) ও প্রচুরক (M_o) নির্ণয় করা শিখেছি।

উদাহরণ ২: চলো ফাইনাল ম্যাচের নিবেশন সারণি ব্যবহার করে গাণিতিক গড় থেকে গড় ব্যবধান নির্ণয় করি:

ওভার	1 – 4	5 – 8	9 – 12	13 – 16	17 – 20
রান	24	32	36	38	30

গাণিতিক গড়, $\overline{x} = a + \frac{\sum f_i u_i}{n} \times h$

$= 10.5 + \frac{18}{160} \times 4$

$= 10.5 + 0.45$

$= 10.95$

ধরি, অনুমিত গড়, $a = 10.5$

শ্রেণি ব্যবধান, $h = 4$

মোট রান, $n = 160$

$\sum f_i u_i = 18$

গড় ব্যবধান নির্ণয়ের জন্য প্রথমে নিচের সারণিটি তৈরি করি:

শ্রেণি ব্যাপ্তি (ওভার)	শ্রেণির মধ্যবিন্দু (x_i)	রান সংখ্যা (f_i)	ধাপ বিচ্যুতি $u_i = \frac{x_i - a}{h}$	$f_i u_i$	$x_i - \overline{x}$ $\overline{x} = 10.95$	$f_i \lvert x_i - \overline{x} \rvert$
1 – 4	2.5	24	–2	–48	8.45	202.8
5 – 8	6.5	32	–1	–32	4.45	142.4
9 – 12	10.5 = a	36	0	0	0.45	16.2
13 – 16	14.5	38	1	38	3.55	134.9
17 – 20	18.5	30	2	60	7.55	226.5
		$n = 160$	$\sum f_i u_i = 18$		$\sum f_i \lvert x_i - \overline{x} \rvert = 722.8$	

সুতরাং গাণিতিক গড় হতে নির্ণীত গড় ব্যবধান $= \frac{\sum f_i \lvert x_i - \overline{x} \rvert}{n} = \frac{722.8}{160} = 4.52$ (প্রায়)।

উদাহরণ ৩: ফাইনাল ম্যাচের নিবেশন সারণি ব্যবহার করে মধ্যক থেকে গড় ব্যবধান নির্ণয় করি:

শ্রেণি ব্যাপ্তি (ওভার)	1 – 4	5 – 8	9 – 12	13 – 16	17 – 20
রান সংখ্যা	24	32	36	38	30

মধ্যক, $M_e = L + (\frac{n}{2} - F_c) \times \frac{h}{f_m}$

$= 9 + (80 - 56) \times \frac{4}{36}$

$= 9 + 2.67$

$= 11.67$ (প্রায়)

এখানে,

$L = 9, F_c = 56,$

$f_m = 36, h = 4$

এবং $n = 160$

শ্রেণি ব্যাপ্তি (ওভার)	শ্রেণির মধ্যবিন্দু (x_i)	রান সংখ্যা (f_i)	ক্রমযোজিত রান সংখ্যা (F_c)	$\lvert x_i - M_e \rvert$ $M_e = 11.67$	$f_i \lvert x_i - M_e \rvert$
1 – 4	2.5	24	24	9.17	220.08
5 – 8	6.5	32	56	5.17	165.44
9 – 12	10.5	36	92	1.17	42.12
13 – 16	14.5	38	130	2.83	107.54
17 – 20	18.5	30	160	6.83	204.9
		$n = 160$	$\sum f_i \lvert x_i - M_e \rvert = 740.08$		

এখানে, $\frac{n}{2} = \frac{160}{2} = 80$ $\therefore$ মধ্যক হবে 80তম পদ। যেহেতু 80তম পদটি (9 – 12) শ্রেণিতে রয়েছে, সুতরাং উপাত্তের মধ্যক শ্রেণি হবে (9 – 12)।

সুতরাং মধ্যক হতে নির্ণীত গড় ব্যবধান $= \frac{\sum f_i \lvert x_i - M_e \rvert}{n} = \frac{740.08}{160} = 4.62$ (প্রায়)।

দলগত কাজ

তোমার ক্লাসের সকল শিক্ষার্থী কয়েকটি দলে বিভক্ত হয়ে দল অনুসারে প্রত্যেকের উচ্চতা (সেমি) মেপে নাও। এবার উপযুক্ত শ্রেণি ব্যবধান নিয়ে প্রাপ্ত উচ্চতার একটি শ্রেণি বিন্যস্ত নিবেশন সারণি তৈরি করো। সারণি ব্যবহার করে (i) গাণিতিক গড়, (ii) মধ্যক ও (iii) প্রচুরক থেকে গড় ব্যবধান নির্ণয় করো।

পরিমিত ব্যবধান (Standard Deviation)

নিচের উপাত্ত সেট তিনটি ভালোভাবে পর্যবেক্ষণ করো।

$X = \{12, 7, 6, 5, 4, 3, 2\}$

$Y = \{12, 10, 10, 9, 9, 9, 2, 2\}$

$Z = \{12, 4, 4, 3, 2, 2, 2\}$

Karl Pearson

এটা স্পষ্ট যে, উপরের তিন সেট উপাত্তের পরিসর একই এবং তা হলো 10। তাছাড়া পরিসর তথ্যসারির সকল মানের উপর নির্ভর করে না। এটি চরম মান ও নমূনা বিচ্যুতি দ্বারা প্রভাবিত হয়। কিন্তু উপরের উপাত্ত সেট তিনটি নিবিড়ভাবে লক্ষ করলে দেখতে পাবে সংখ্যাগুলোর মধ্যে ভিন্নতা রয়েছে এবং এদের কেন্দ্রীয় মানও ভিন্ন ভিন্ন। গড় ব্যবধান তথ্যসারির প্রত্যেকটি মানের উপর নির্ভরশীল হলেও এটি আবার বিচ্যুতির পরম মান নিয়ে নির্ণয় করা হয়। এজন্য পরবর্তীতে কোনো বীজগাণিতিক প্রক্রিয়ায় এটি ব্যবহার করা যায় না। তাছাড়া পরমমান প্রাপ্তির জন্য গাণিতিকভাবে ঋণাত্মক ব্যবধানগুলো ধনাত্মক হিসেবে বিবেচনা করায় এতে অনেকক্ষেত্রে ভুল হওয়ার সম্ভাবনা থাকে। তাই তথ্যসারির সকল মানের মধ্যে প্রকৃত বৈচিত্র্য নির্ণয় করতে হলে নতুন একটি পরিমাপের প্রয়োজনীয়তা রয়েছে। এক্ষেত্রে **পরিমিত ব্যবধান** অনেক বেশি কার্যকর ভূমিকা পালন করে। ১৯৮৩ খ্রিষ্টাব্দে কার্ল পিয়ারসন পরিমিত ব্যবধান সম্পর্কে ধারণা প্রদান করেন।

কিন্তু পরিমিত ব্যবধান জানার পূর্বে আমাদের **ভেদাঙ্ক** (Variance) সম্পর্কে জানতে হবে।

ভেদাঙ্ক (Variance)

তোমাদের নিশ্চয়ই মনে আছে, গাণিতিক গড় বা মধ্যক থেকে গড় ব্যবধান নির্ণয়ের সময় ব্যবধানের পরম মান ব্যবহার করা হয়েছিল। কিন্তু কেন? কারণটি নিচের বক্সে সংক্ষেপে লেখো।

মাথা খাটাও

গড় ব্যবধান নির্ণয়ে পরম মান ব্যবহার সংক্রান্ত সমস্যাটি আমরা অন্যভাবেও সমাধান করতে পারি। তথ্যরাশির প্রতিটি মান থেকে তাদের গড় বা মধ্যকের ব্যবধানকে বর্গ করে। সেক্ষেত্রে আবশ্যই বিচ্যুতির বর্গ অঋণাত্মক হবে।

ধরো, কোনো চলক x এর n সংখ্যক মান $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ এবং তাদের গাণিতিক গড় $\overline{x}$। তাহলে, গাণিতিক গড় থেকে প্রতিটি মানের বিচ্যুতির বর্গের সমষ্টি = $(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + (x_3 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$ হবে। যদি ব্যবধানের বর্গের সমষ্টি শূন্য হয়, তবে $(x_i - \overline{x})$ আবশ্যই শূন্য হবে। সেক্ষেত্রে গড় ও মানগুলোর মধ্যে কোনো পার্থক্য থাকবে না। কিন্তু যদি $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ এর মান খুব ছোটো হয়, তবে তথ্যসারির প্রতিটি মান গাণিতিক গড় বা কেন্দ্রীয় মানের খুব কাছাকাছি থাকবে। অর্থাৎ বিস্তার ব্যবধান কম হবে। সেক্ষেত্রে আমরা বলতে পারি, তথ্যসারির মানগুলো অনেক বেশি সামঞ্জস্যপূর্ণ।

চলো উদাহরণের মাধ্যমে বিষয়টি বুঝতে চেষ্টা করি:

আলেয়ার পরিবারের সদস্যসংখ্যা 6 এবং তাদের বয়স 5, 15, 25, 35, 45 ও 55 বছর। পরিবারের সদস্যদের বয়সের গড় $\overline{x} = 30$. [হিসেবটি যাচাই করে দেখো]

এক্ষেত্রে গাণিতিক গড় $\overline{x}$ থেকে প্রতিটি মানের বিচ্যুতির বর্গের সমষ্টি

$$\sum_{i=1}^{6}(x_i - \overline{x})^2 = (5-30)^2 + (15-30)^2 + (25-30)^2 + (35-30)^2 + (45-30)^2 + (55-30)^2$$
$$= (-25)^2 + (-15)^2 + (-5)^2 + (5)^2 + (15)^2 + (25)^2$$
$$= 625 + 225 + 25 + 25 + 225 + 625 = 1750$$

অপরদিকে টমাসের পরিবার একান্নবর্তী পরিবার। পরিবারে মোট 31 জন সদস্য। বাড়িতে সব সময় একটি উৎসব উৎসব আমেজ লেগেই থাকে। টমাসের পরিবারের সদস্যদের বয়স 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44 ও 45 বছর এবং তাদের বয়সের গড় $\overline{y} = 30$. [এক্ষেত্রেও হিসেবটি যাচাই করে দেখো]

$$\therefore \sum_{i=1}^{31}(y_i - \overline{y})^2 = (15-30)^2 + (16-30)^2 + (17-30)^2 + \ldots + (45-30)^2$$
$$= (-15)^2 + (-14)^2 + (-13)^2 + \ldots + 15^2$$
$$= 2\,(1^2 + 2^2 + \ldots + 15^2)$$
$$= 2 \times \frac{15 \times (15+1)(30+1)}{6}$$
$$= 5 \times 16 \times 31 = 2480$$

সকল স্বাভাবিক সংখ্যা n এর জন্য

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

উপরের হিসাব দুটি পর্যালোচনা করে দেখা যায়, আলেয়া ও টমাসের পরিবারের সদস্যদের বয়সের গাণিতিক গড় একই। কিন্তু টমাসের পরিবারের সদস্যদের বয়সের বিস্তারের (30) চেয়ে আলেয়ার পরিবারের সদস্যদের বয়সের বিস্তার (50) বেশি।

সুতরাং আমরা বলতে পারি, বিস্তার পরিমাপের ক্ষেত্রে তথ্যসারির উপাত্ত ও তাদের গাণিতিক গড়ের ব্যবধানের বর্গের সমষ্টি নির্ণয় করলেই সমস্যাটির সমাধান হবে না। তথ্যসারির উপাত্ত ও তাদের গাণিতিক গড়ের ব্যবধানের বর্গের সমষ্টির গড় নির্ণয় করতে হবে। অর্থাৎ আমাদের $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$ নির্ণয় করতে হবে।

যেমন: আলেয়ার পরিবারের ক্ষেত্রে আমরা পাব, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=\frac{1}{6}\times 1750=291.67$

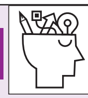
এবং টমাসের পরিবারের ক্ষেত্রে আমরা পাব, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=\frac{1}{31}\times 2480=80$

দুই পরিবারের ফলাফল থেকে এটি আরও স্পষ্ট যে, বয়সের গড় হতে টমাসের পরিবারের সদস্যদের বয়সের বিস্তারের চেয়ে আলেয়ার পরিবারের সদস্যদের বয়সের বিস্তার অনেক বেশি।

অতএব, বিস্তার পরিমাপের জন্য $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$ একটি উপযুক্ত মাধ্যম হতে পারে। আর এটিই হলো **ভেদাঙ্ক (Variance)**। একে σ^2 (পড়তে হবে sigma square) প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয়।

সুতরাং কোনো তথ্যসারির বা নিবেশনের প্রতিটি মান হতে তার গাণিতিক গড়ের ব্যবধানের বর্গের সমষ্টিকে মোট তথ্যসংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে যে মান পাওয়া যায় তাকে ভেদাঙ্ক বলা হয়।

মাথা খাটাও



আলেয়া ও টমাসের পরিবারের সদস্যদের বয়সের ভেদাঙ্ক যথাক্রমে ________________ ও ________________।

সূত্রের মাধ্যমে ভেদাঙ্ক নির্ণয়

অবিন্যস্ত বা অশ্রেণিকৃত উপাত্তের ক্ষেত্রে:
কোনো চলক x এর n সংখ্যক মান $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ এবং তাদের গাণিতিক গড় $\overline{x}$ হলে,
ভেদাঙ্ক $\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$

বিন্যস্ত বা শ্রেণিকৃত উপাত্তের ক্ষেত্রে:
কোনো চলক x এর n সংখ্যক মান $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ যাদের গণসংখ্যাসমূহ যথাক্রমে $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ এবং গাণিতিক গড় $\overline{x}$ হলে,
ভেদাঙ্ক $\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i-\overline{x})^2$

উদাহরণ ৪: চলো সূত্র ব্যবহার করে ব্যাটসম্যান B এর করা রানের ভেদাঙ্ক নির্ণয় করি:

ধাপ – ১: ব্যাটসম্যান B এর করা রানের গাণিতিক গড়, $\overline{x}=53$ [তোমরা ইতোমধ্যেই নির্ণয় করেছ]

ধাপ – ২: গাণিতিক গড়, $\overline{x} = 53$ থেকে উপাত্তগুলোর প্রতিটি মানের পার্থক্য $(x_i - \overline{x})^2$ নির্ণয় করি:

রান x_i	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$
53	0	0
46	-7	49
48	-5	25
50	-3	9
53	0	0
53	0	0
58	5	25
60	7	49
57	4	16
52	-1	1
$\sum_{i=1}^{10}(x_i - \overline{x})^2 = 174$		

ধাপ – ৩:

$\therefore$ ভেদাঙ্ক $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \overline{x})^2$

$= \frac{174}{10}$

$=17.4$

$\therefore$ ভেদাঙ্ক 17.4

নির্দেশনা

ভেদাঙ্ক নির্ণয়ের জন্য অবিন্যস্ত বা অশ্রেণিকৃত উপাত্তের বিন্যস্ত করার দরকার নেই।

সূত্র থেকে সূত্র বানাই

ইতোমধ্যে তুমি $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ সূত্রটি ব্যবহার করে ভেদাঙ্ক নির্ণয় করা শিখেছ। আমরা যদি এই সূত্রটিকে একটু সরল করে আরও সহজে ব্যবহার উপযোগী করে বানাতে পারি তাহলে কেমন হয়? তাহলে চলো চেষ্টা করে দেখি :

ভেদাঙ্ক $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i\overline{x} + \overline{x}^2)$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - 2\overline{x}.\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{x}^2$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - 2\overline{x}.\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} + \frac{1}{n}(\overline{x}^2 + \overline{x}^2 + \overline{x}^2 + \ldots n \text{ সংখ্যক } \overline{x}^2)$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - 2\overline{x}.\overline{x} + \frac{1}{n}.n.\overline{x}^2$$

মাথা খাটাও

কোন ক্ষেত্রে ভেদাঙ্ক সর্বনিম্ন হবে?

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - 2\bar{x}.\bar{x} + \bar{x}^2$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2$$

মাথা খাটাও

প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার গাণিতিক গড় ও ভেদাঙ্ক নির্ণয় করো।

$\therefore$ ভেদাঙ্ক $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2$ । ভেদাঙ্ক নির্ণয়ের ক্ষেত্রে এই সূত্রটির ব্যবহার অপেক্ষাকৃত সহজ কেনো? তোমার মতামত ব্যক্ত করো।

জোড়ায় কাজ

পাঁচ টাকার একটি মুদ্রা 20 বার নিক্ষেপ করো। যতবার শাপলা পেয়েছ, সেই সংখ্যা খাতায় লেখো। এভাবে দুজনে মিলে মোট 10 বার খেলাটি খেলো। ধরো, মুদ্রা নিক্ষেপে শাপলা পাওয়ার সংখ্যা 6, 8, 10, 10, 10, 11, 12, 12, 13, 13 । প্রাপ্ত উপাত্তের গাণিতিক গড় ও ভেদাঙ্ক নির্ণয় করো।

উদাহরণ ৫: ফাইনাল ম্যাচের নিবেশন সারণি ব্যবহার করে গড় ও ভেদাঙ্ক নির্ণয় করি:

শ্রেণি ব্যাপ্তি (ওভার)	1 – 4	5 – 8	9 – 12	13 – 16	17 – 20
রান সংখ্যা	24	32	36	38	30

ভেদাঙ্ক নির্ণয়ের জন্য প্রথমে নিচের সারণিটি তৈরি করি:

শ্রেণি ব্যাপ্তি (ওভার)	শ্রেণির মধ্যবিন্দু (x_i)	রান সংখ্যা (f_i)	$f_i x_i$	$(x_i - \overline{x})^2$ $\overline{x} = 10.95$	$f_i(x_i - \overline{x})^2$
1 – 4	2.5	24	60	71.4025	1713.66
5 – 8	6.5	32	208	19.8025	633.68
9 – 12	10.5	36	378	0.2025	7.29
13 – 16	14.5	38	551	12.6025	478.895
17 – 20	18.5	30	555	57.0025	1710.075
		$n = 160$	$\sum f_i x_i = 1752$	$\sum f_i(x_i - \overline{x})^2 = 4543.6$	

$\therefore$ ভেদাঙ্ক $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \overline{x})^2$

$= \frac{4543.6}{160}$

$= 28.40$ প্রায়

এখানে,

গাণিতিক গড়, $\overline{x} = \frac{\sum f_i x_i}{n}$

$= \frac{1752}{160} = 10.95$

দলগত কাজ

(i) দলে বিভক্ত হয়ে তোমাদের ক্লাসের সকল শিক্ষার্থীর ওজন (কেজিতে) পরিমাপ করো। প্রাপ্ত উপাত্তের ভেদাঙ্ক নির্ণয় করো।

(ii) উপযুক্ত শ্রেণি ব্যবধান নিয়ে উপাত্তগুলোকে শ্রেণি বিন্যস্ত করো। এবার সহজ পদ্ধতিতে শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তের ভেদাঙ্ক নির্ণয় করো।

পরিমিত ব্যবধান (Standard Deviation)

পরিমিত ব্যবধান কী?

কোনো তথ্যসারির মানগুলো হতে গাণিতিক গড়ের ব্যবধানের বর্গের সমষ্টিকে মোট গণসংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে যে মান পাওয়া যায় তার বর্গমূলকে পরিমিত ব্যবধান বলা হয়। অর্থাৎ ভেদাঙ্কের σ^2 বর্গমূলই হলো **পরিমিত ব্যবধান**। পরিমিত ব্যবধানকে σ (গ্রিক অক্ষর সিগমা) বা SD দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

পরিমিত ব্যবধান আমরা কোথায় এবং কেন ব্যবহার করি?

তোমরা জেনে অবাক হবে, আমাদের দৈনন্দিন জীবনে এমন অনেক উদাহরণ রয়েছে যেখানে আমরা না জেনেও পরিমিত ব্যবধানের মতো গাণিতিক ঘটনা প্রয়োগ করছি। যেমন:

১. আমাদের আয় ও চাহিদা অনুসারে দৈনন্দিন বাজেটে আমরা একটি গড় অর্থ বরাদ্ধ করে থাকি। কোনো রকম গাণিতিক হিসাব ছাড়াই আমরা পরিমিত ব্যবধান ব্যবহার করে নির্ধারণ করে থাকি বরাদ্ধের চেয়ে খুব বেশি বা কম ব্যয় করছি কি না। এটি স্পষ্টতই একটি সহজাত গণনা যা আমার মনই আমার জন্য করে থাকে।

২. তাছাড়া বিভিন্ন প্রকার গবেষণা, পরিকল্পনা প্রণয়ন, সামাজিক কর্মকান্ড ও শিল্পকারখানায় সমজাতীয় পণ্যের উৎকর্ষতা যাচাই সম্পর্কিত তথ্যসমূহের বিশ্লেষণে এটি বহুলভাবে ব্যবহৃত হয়ে থাকে।

৩. পরিমিত ব্যবধান হলো এমন একটি গুরুত্বপূর্ণ হাতিয়ার যা ব্যবসার মালিগণ ঝুঁকি ব্যবস্থাপনা এবং সিদ্ধান্ত গ্রহণের ক্ষেত্রে ব্যবহার করে থাকেন। বিক্রয় হ্রাস বা খারাপ গ্রাহক পর্যালোচনা বৃদ্ধির মতো পরিস্থিতিতে সম্ভাব্য ঝুঁকি ব্যবস্থাপনার কৌশলগুলো তৈরি করতে এটি ব্যবহার করেন।

৪. চিকিৎসা গবেষণা ও ঔষধ তৈরিতে পরিমিত ব্যবধান ব্যবহার করা হয়। তুমি হয়তো ভাবছো, এটি কীভাবে সম্ভব? তোমরা তো জানো, করোনাভাইরাসের মতো একটি নতুন ভাইরাসের জন্য একটি নতুন

ভ্যাকসিন আবিষ্কার জরুরী হয়ে পড়েছিল। এর জন্য ভাইরাসটির বিপুল সংখ্যক অ্যান্টি-ভাইরাল দিয়ে পরীক্ষা-নিরীক্ষা করা হয় এবং সময়ের সাথে সাথে তা পর্যবেক্ষণ করা হয়। প্রতিটি নমুনায় ভাইরাস নির্মূলের গড়ের হারে অ্যান্টি-ভাইরালের একই প্রভাব রয়েছে কি না তা পরিমিত ব্যবধানের মাধ্যমে গণনা করা হয়।

সূত্রের মাধ্যমে পরিমিত ব্যবধান নির্ণয়:

অবিন্যস্ত বা অশ্রেণিকৃত উপাত্তের ক্ষেত্রে:

ক) প্রত্যক্ষ বা সরাসরি পদ্ধতি: কোনো চলক x এর n সংখ্যক মান $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ এবং তাদের গাণিতিক গড় $\overline{x}$ হলে, পরিমিত ব্যবধান,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}} \text{ বা } \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2}$$

খ) সহজ বা অনুমিত গড় বা সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি: পরিমিত ব্যবধান,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}}{n}\right)^2}$$

যেখানে, $\mathrm{A} =$ অনুমিত গড় এবং $\mathrm{d} = x - \mathrm{A}$

মাথা খাটাও

i) $-2x, -x, 0, x, 2x$ সংখ্যাগুলোর গড় ব্যবধান ও পরিমিত ব্যবধান কত?

ii) দুইটি রাশির গড় ও ভেদাঙ্ক যথাক্রমে 10 ও 4 হলে রাশি দুইটি নির্ণয় করো।

iii) প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার পরিমিত ব্যবধান $\sqrt{10}$ হলে, $n=$ কত?

বিন্যস্ত বা শ্রেণিকৃত উপাত্তের ক্ষেত্রে:

ক) প্রত্যক্ষ বা সরাসরি পদ্ধতি: কোনো চলক x এর n সংখ্যক মান $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ যাদের গণসংখ্যাসমূহ যথাক্রমে $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$। এখন গাণিতিক গড় $\overline{x}$ হলে,

$$\text{পরিমিত ব্যবধান, } \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \overline{x})^2}{n}} \text{ বা } \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{n}\right)^2}$$

খ) সহজ বা অনুমিত গড় বা সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি: পরিমিত ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f\mathrm{d}^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} f\mathrm{d}}{n}\right)^2} \times h$

যেখানে, $\mathrm{A} =$ অনুমিত গড়, $\mathrm{d} = \frac{x - \mathrm{A}}{h}$ এবং $h =$ শ্রেণি ব্যবধান

উদাহরণ ৬: ধরো, তোমার দলের 8 জন শিক্ষার্থীর ওজন (কেজিতে) নিম্নরূপ।

49, 63, 46, 59, 65, 52, 60, 54

চলো সহজ বা সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে উপরের তথ্যরাশির পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করি:

মাথা খাটাও

(i) পরিমিত ব্যবধান ঋণাত্মক হয় না কেন?

(ii) কোন ক্ষেত্রে পরিমিত ব্যবধান সর্বনিম্ন হবে?

রাশি (x)	$d = x - A$	d^2
46	–13	169
49	–10	100
52	–7	49
54	–5	25
59 = A	0	0
60	1	1
63	4	16
65	6	36
$n = 8$	$\sum d = -24$	$\sum d^2 = 396$

মনে করি, অনুমিত গড় A = 59

এখানে,মোট গণসংখ্যা $n = 8$

$\sum d = -24$ এবং

$\sum d^2 = 396$

$\therefore$ পরিমিত ব্যবধান,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} d^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} d}{n}\right)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{396}{8} - \left(\frac{-24}{8}\right)^2}$$

$= \sqrt{40.5} = 6.36$ (প্রায়)।

উদাহরণ ৭: ফাইনাল ম্যাচের নিবেশন সারণি ব্যবহার করে সহজ বা অনুমিত গড় বা সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করি:

শ্রেণি ব্যাপ্তি (ওভার)	1 – 4	5 – 8	9 – 12	13 – 16	17 – 20
রান সংখ্যা	24	32	36	38	30

পরিমিত ব্যবধান নির্ণয়ের জন্য প্রথমে নিচের সারণিটি তৈরি করি:

শ্রেণি ব্যাপ্তি (ওভার)	শ্রেণির মধ্যবিন্দু (x)	রান সংখ্যা (f)	$d = \frac{x - A}{h}$	fd	fd^2
1 – 4	2.5	24	–2	–48	96
5 – 8	6.5	32	–1	–32	32
9 – 12	10.5=A	36	0	0	0
13 – 16	14.5	38	1	38	38
17 – 20	18.5	30	2	60	120
		$n = 160$		$\sum fd = 18$	$\sum fd^2 = 286$

$\therefore$ পরিমিত ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} fd^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} fd}{n}\right)^2} \times h$

$= \sqrt{\frac{286}{160} - \left(\frac{18}{160}\right)^2} \times 4 = \sqrt{1.7748} = 1.33 \times 4$

≈ 5.32

এখানে, অনুমিত গড় $A = 10.5$

$n = 160$, $h = 4$,

$\sum fd = 18$ এবং $\sum fd^2 = 286$

একক কাজ

একটি কারখানার শ্রমিকের সাপ্তাহিক বেতনের (শত টাকায়) গণসংখ্যা নিবেশন সারণি দেওয়া হলো।

সাপ্তাহিক বেতন	20 – 22	23 – 25	26 – 28	29 – 31	32 – 34	35 – 37	38 – 40
শ্রমিকের সংখ্যা	5	10	26	30	16	8	5

ক) ঐ কারখানার শ্রমিকগণ সপ্তাহে গড়ে কত টাকা বেতন পেয়ে থাকেন?

খ) অনুমিত গড় পদ্ধতিতে উপাত্তের পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করো।

একক কাজ

ধরো, তোমার পরিবারে এক বছরের বিদ্যুৎ খরচের (ইউনিট)তালিকা নিম্নরূপ:

মাস	জানুয়ারি	ফেব্রয়ারি	মার্চ	এপ্রিল	মে	জুন	জুলাই	আগস্ট	সেপ্টে:	অক্টো:	নভে:	ডিসে:
ইউনিট	322	335	370	883	985	452	402	380	362	350	340	335

ক) উপাত্তগুলো সংখ্যারেখায় উপস্থাপন করো।

খ) উপাত্তের গাণিতিক গড় ও মধ্যক নির্ণয় করো।

গ) গাণিতিক গড় ও মধ্যক থেকে উপাত্তের গড় ব্যবধান ও পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করো।

ঘ) কোন দুই মাসে সবচেয়ে বেশি বিদ্যুৎ ব্যবহৃত হয়েছে? এর কী কী কারণ থাকতে পারে? ওই দুই মাসের বিদ্যুৎ খরচ বাদ দিলে তোমাদের বিদ্যুৎ খরচ গড়ে কত ইউনিট হবে? সেক্ষেত্রে পরিমিত ব্যবধানই বা কত হবে?

ঙ) কী ব্যবস্থা গ্রহণ করলে সারা বছরের বিদ্যুৎ খরচের ক্ষেত্রে সর্বোচ্চ সুবিধা পাওয়া যাবে বলে তুমি মনে করো?

অনুশীলনী

১. নিচের তথ্যরাশির পরিসর নির্ণয় করো।

ক) 14, 3, 19, 17, 4, 9, 16, 19, 22, 15, 18, 17, 12, 8, 16, 11, 3, 11, 0, 15

খ) 48, 70, 58, 40, 43, 55, 63, 46, 56, 44

গ)

উচ্চতা (সেমি)	95 – 105	105 – 115	115 – 125	125 – 135	135 – 145	145 – 155
গণসংখ্যা	8	12	28	30	15	7

২। নিচের তথ্যরাশির গাণিতিক গড় ও মধ্যক থেকে গড় ব্যবধান নির্ণয় করো।

ক) 8, 15, 53, 49, 19, 62, 7, 15, 95, 77

খ) 10, 15, 54, 59, 19, 62, 98, 8, 25, 95, 77, 46, 36

৩। প্রদত্ত উপাত্তের গাণিতিক গড় ও মধ্যক থেকে গড় ব্যবধান নির্ণয় করো।

x	60	61	62	63	64	65	66	67
f	2	0	15	30	25	12	11	5

৪। প্রতিদিন রিক্সায় স্কুলে আসা যাওয়া বাবদ সবুজ ও মৌলির যথাক্রমে 50 ও 80 টাকা খরচ হয়।

ক) সবুজ ও মৌলির খরচের পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করো।

খ) দেখাও যে, উপাত্ত দুটির গড় ব্যবধান পরিসরের অর্ধেক।

৫। থানা স্বাস্থ্য কেন্দ্রের বহির্বিভাগ চিকিৎসাসেবা নিতে আসা কোনো এক দিনের রোগীর সংখ্যার তথ্য নিম্নরূপ:

বয়স	0 – 15	15 – 30	30 – 45	45 – 60	60 – 75	75 – 90
রোগীর সংখ্যা	15	4	5	9	7	10

ক) ভেদাঙ্কের মান কখন সর্বনিম্ন হয়? ব্যাখ্যা করো।

খ) উপাত্তের গড় ব্যবধান ও পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করে তুলনা করো।

৬। নিচের গণসংখ্যা নিবেশন সারণির গাণিতিক গড় ব্যবধান 33.2 । গাণিতিক গড় নির্ণয় করে p এর মান নির্ণয় করো।

শ্রেণি ব্যাপ্তি	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70
গণসংখ্যা	8	12	$\boxed{p}$	30	15	10	5

৭। নিপার একটি ফুলের বাগান আছে। বাগানটিতে 60টি বিভিন্ন জাতের ফুল গাছ আছে। গাছগুলোর উচ্চতার (সেন্টিমিটারে) মধ্যক 28.5 ।

উচ্চতা (সেমি)	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60
গাছের সংখ্যা	5	$\boxed{x}$	20	15	$\boxed{y}$	5

ক) x ও y এর মান নির্ণয় করে সারণিটি পূরণ করো।

খ) সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গাছগুলোর উচ্চতার গড় নির্ণয় করো।

গ) গাছগুলোর উচ্চতার মধ্যক থেকে গড় ব্যবধান নির্ণয় করো।

ঘ) গাছগুলোর উচ্চতার গড় থেকে পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করো।

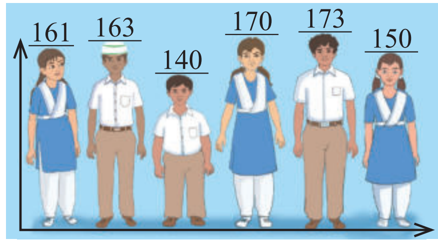
৮. পাশের ছবিটি লক্ষ করো। ছবিতে ছয় জন শিক্ষার্থীর উচ্চতা সেন্টিমিটারে দেওয়া আছে।

শিক্ষার্থীদের উচ্চতার -

ক) গড় ও মধ্যক নির্ণয় করো।

খ) গড় ও মধ্যক থেকে গড় ব্যবধান নির্ণয় করো।

গ) গড় ও মধ্যক থেকে পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করো।

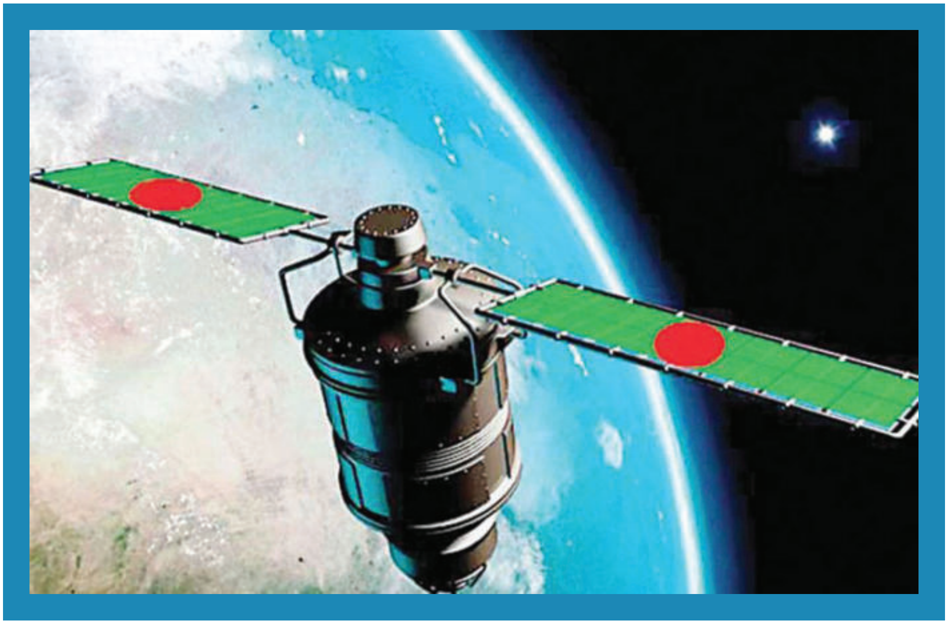


৯। দশ সদস্যের একটি নমুনার গাণিতিক গড় ও পরিমিত ব্যবধান যথাক্রমে 9.5 এবং 2.5। পরে 15 মানের আরও একটি সদস্য নমুনায় অন্তর্ভুক্ত করা হলো। তাহলে, এগারো সদস্যবিশিষ্ট নমুনার গাণিতিক গড় ও পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করো।

১০। 100 টি কোম্পানির বার্ষিক মুনাফার (কোটি টাকায়) তথ্য নিচে দেওয়া হলো:

মুনাফা (কোটি টাকায়)	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60
কোম্পানির সংখ্যা	7	12	22	30	20	9

উপাত্তের গাণিতিক গড় হতে গড় ব্যবধান ও পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করো।



বঙ্গবন্ধু স্যাটেলাইট-১ : বাংলাদেশের মালিকানাধীন প্রথম কৃত্রিম উপগ্রহ

বঙ্গবন্ধু স্যাটেলাইট-১ বাংলাদেশের প্রথম ভূস্থির (Geostationary) যোগাযোগ ও সম্প্রচার উপগ্রহ। এর মধ্য দিয়ে ৫৭ তম দেশ হিসেবে নিজস্ব স্যাটেলাইট উৎক্ষেপণকারী দেশের তালিকায় যুক্ত হয় বাংলাদেশ। এটি ১১ই মে ২০১৮ যুক্তরাষ্ট্রের কেনেডি স্পেস সেন্টার থেকে উৎক্ষেপণ করা হয়। এটি ছিল ফ্যালকন ৯ ব্লক-৫ রকেটের প্রথম পেলোড উৎক্ষেপণ।

এটি ফ্রান্সের থেলিস অ্যালেনিয়া স্পেস কর্তৃক নকশা ও তৈরি করা হয়েছে। বঙ্গবন্ধু স্যাটেলাইট-১, ১৬০০ মেগাহার্টজ ক্ষমতাসম্পন্ন মোট ৪০টি কে-ইউ এবং সি-ব্যান্ড ট্রান্সপন্ডার বহন করছে এবং এর আয়ু ১৫ বছর। এর নির্মাণ ব্যয় প্রায় তিন হাজার কোটি টাকা। বর্তমানে স্যাটেলাইটের ব্যান্ডউইথ ও ফ্রিকোয়েন্সি ব্যবহার করে ইন্টারনেট বঞ্চিত অঞ্চল যেমন- পার্বত্য ও হাওড় এলাকায় ইন্টারনেট সুবিধা প্রদান করা সম্ভব হচ্ছে, প্রত্যন্ত অঞ্চলে ইন্টারনেট ও ব্যাংকিং সেবা, টেলিমেডিসিন ও দূরশিক্ষণ ব্যবস্থা প্রসারেও এটি ব্যবহৃত হচ্ছে। টিভি চ্যানেলগুলো তাদের সম্প্রচার সঠিকভাবে পরিচালনার জন্য বিদেশি নির্ভরতা কমিয়ে এর উপর নির্ভর করছে। ফলে দেশের টাকা দেশেই থাকছে। বড় প্রাকৃতিক দুর্যোগের সময় মোবাইল নেটওয়ার্ক অচল হয়ে পড়লে এর মাধ্যমে দুর্গত এলাকায় যোগাযোগ চালু রাখা সম্ভব। শুধু তাই নয় বঙ্গবন্ধু স্যাটেলাইট-২ মহাকাশে উৎক্ষেপণেরও উদ্যোগ নেওয়া হয়েছে। বঙ্গবন্ধু ১৯৭৫ সালের ১৪ই জুন বেতবুনিয়ায় ভূ-উপগ্রহ কেন্দ্র স্থাপনের মাধ্যমে যে স্বপ্নের বীজ বপন করেছিলেন, সেই স্বপ্ন মহীরুহে পরিণত করেছেন প্রধানমন্ত্রী শেখ হাসিনা।

স্যাটেলাইটের বাইরের অংশে বাংলাদেশের লাল-সবুজ পতাকার রঙের নকশার উপর ইংরেজিতে লেখা রয়েছে বাংলাদেশ ও বঙ্গবন্ধু-১, বাংলাদেশ সরকারের একটি মনোগ্রামও সেখানে রয়েছে।

২০২৪ শিক্ষাবর্ষ
নবম শ্রেণি
গণিত

'একজন ঘুমন্ত মানুষ আরেকজন ঘুমন্ত মানুষকে জাগিয়ে তুলতে পারে না।'
–শেখ সাদি

সমৃদ্ধ বাংলাদেশ গড়ে তোলার জন্য যোগ্যতা অর্জন করো
– মাননীয় প্রধানমন্ত্রী শেখ হাসিনা

তথ্য, সেবা ও সামাজিক সমস্যা প্রতিকারের জন্য **'৩৩৩'** কলসেন্টারে ফোন করুন

নারী ও শিশু নির্যাতনের ঘটনা ঘটলে প্রতিকার ও প্রতিরোধের জন্য ন্যাশনাল হেল্পলাইন সেন্টার
১০৯ নম্বর-এ (টোল ফ্রি, ২৪ ঘণ্টা সার্ভিস) ফোন করুন

শিক্ষা মন্ত্রণালয়

গণপ্রজাতন্ত্রী বাংলাদেশ সরকার কর্তৃক বিনামূল্যে বিতরণের জন্য